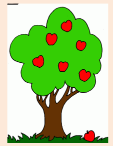
**PRIMERA CAUSA DE FRACASOS: EL ERROR DE NO USAR UNIDADES**

La mejor manera de resolver problemas es utilizar los números con sus unidades correspondientes. Facilita la identificación de una respuesta errónea (aunque a cambio haya que escribir un poco más).
Casi todos hemos hecho en nuestros primeros años el siguiente problema tal y como está en la parte de la izquierda, sin unidades. Sin embargo la manera correcta es hacerlo como está a la derecha, con unidades:

| ➔ *Problema 1-Tenemos 4 árboles y en cada árbol hay 3 manzanas ¿Cuántas manzanas hay en total?* | |
|---|---|
| ***Operaciones erróneas por incoherencia en las unidades***<br>*La última es coherente pero también es errónea*<br><br>4 x 3 =12 manzanas<br>4 árboles x 3 manzanas = 12 manzanas<br>4 árboles x 3 manzanas = 12 árboles. manzanas | ***Operación correcta con uso correcto de las unidades***<br>*Los números se multiplican y se dividen. Las unidades también se multiplican y se dividen*<br><br>$4\ \cancel{\acute{a}rboles} \cdot \frac{3 manzanas}{1 \cancel{\acute{a}rbol}} = 12 manzanas$  |

Se puede cambiar el orden para resolver el problema inverso $\boxed{\frac{3 manzanas}{1 \acute{a}rbol}}$ → $\boxed{\frac{1 \acute{a}rbol}{3 manzanas}}$ Por ejemplo:

| ➔ *Problema 2-Tenemos 12 manzanas y sabemos que en cada árbol hay 3 manzanas ¿Cuántos árboles tengo?* |
|---|
| $12\ \cancel{manzanas} \cdot \frac{1 \acute{a}rbol}{3\ \cancel{manzanas}} = 4 \acute{a}rboles$ |

**SEGUNDA CAUSA DE FRACASOS: LA GRAN DIVERSIDAD DE MÉTODOS QUE SE USAN PARA RESOLVER PROBLEMAS, UNOS MEJORES Y OTROS PEORES**

Los métodos básicos para resolver este tipo de problemas son tres:

**-Reducción a la unidad**

**-Reglas de tres**

**-Fórmulas**

La utilización de un método u otro va variando según el nivel educativo y el gusto del profesorado.

- EDUCACIÓN PRIMARIA:
    - Se usa el sistema de **Reducción a la unidad** de manera simplificada, **sin usar las unidades** correspondientes.

- EDUCACIÓN SECUNDARIA:
    - Se usan tres maneras de **Reducción a la unidad:**
        - De manera simplificada**,** sin usar las unidades
        - Con unidades
        - Encadenada*
    - **Reglas de tres**
    - **Constante de proporcionalidad**
    - **Fórmulas**

**La reducción a la unidad encadenada no tiene nombre específico. Muchos profesores usan el nombre de factores de conversión, lo que lleva a confusión con los cambios entre unidades. Considero que <u>reducción a la unidad encadenada</u> es un nombre que describe bastante bien al método de encadenar operaciones sin hallar los resultados intermedios. Se usa el <u>factor de proporcionalidad</u> directamente en vez de reducirlo a la unidad.*

**TERCERA CAUSA DE FRACASOS: LA FORMA DE TRABAJAR LA TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD**

La tercera causa importante radica en **cómo se explica la teoría**. Se dedica un espacio a los conceptos de razón, proporción y constante de proporcionalidad pero luego no se vuelven a nombrar nunca más. Y estos tres conceptos son muy importantes y se deben tener siempre presentes porque son los que unifican todos los métodos de resolución de problemas.

El concepto de razón es útil para explicar la proporcionalidad directa pero complica a la hora de explicar la inversa, por presentar en este caso la relación entre magnitudes en forma de cociente en vez de como una multiplicación. Es más fácil hablar simplemente de relaciones entre magnitudes.

| | **RELACIONES ENTRE LAS MAGNITUDES** | **PROPORCIONALIDAD**<br>Si se conoce el valor de tres magnitudes se puede hallar una cuarta desconocida | **CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD K** |
|---|---|---|---|
| **DIRECTA** | Se lee como "dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al <u>aumentar una aumenta la otra</u>" $\boxed{\frac{a}{b}}$ | $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$<br>Es la base de:<br>-Las **Reglas de tres directas**<br>-Se aplica en **fórmulas** de procesos físicos y químicos, por ejemplo: $\boxed{\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}}$ | $\boxed{\frac{a}{b}=k}$<br>Es la base de:<br>-La **Reducción a la unidad en** problemas de proporcionalidad directa<br>-De los **Factores de conversión**<br>-De algunas **fórmulas** $\boxed{p=\frac{F}{S}}$<br>-Se utiliza para la elaboración de **gráficas** |
| **INVERSA** | Se lee como "dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando <u>al aumentar una disminuye la otra</u>" $\boxed{a.b}$ | $\boxed{a.b=c.d}$<br>Es la base de<br>-Las **Reglas de tres inversas.**<br>-Se aplica en **fórmulas** de procesos físicos y químicos, por ejemplo $\boxed{p_1 \cdot V_1=p_2 \cdot V_2}$ | $\boxed{a.b=k}$<br>Es la base de:<br>-**La Reducción a la unidad** en problemas de proporcionalidad inversa<br>-De algunas **fórmulas,** por ej: $\boxed{F=m.a}$<br>-Se utiliza para la elaboración de **gráficas** |

**PROPORCIONALIDAD DIRECTA** $\boxed{\frac{a}{b}=k}$

A continuación se resuelve un mismo problema de proporcionalidad directa con los diferentes métodos para que se puedan comparar:

| |
|---|
| *Problema* 4: 10 Kg de harina cuestan 20 €. Determina cuánto cuestan 7 Kg de harina |

| REDUCCIÓN A LA UNIDAD (método simplificado, sin unidades) |
|---|
| $\begin{array}{l\|l} 20 & 10 \\ \hline 00 & 2 \end{array}$ 20:10 = 2 euros cuesta cada kg de harina<br>2 x 7 = 14 € cuestan 7 Kg de harina |

| REDUCCIÓN A LA UNIDAD (con unidades) | REDUCCIÓN A LA UNIDAD (encadenada) |
|---|---|
| $\frac{20\ €}{10\ Kg} = 2\frac{€}{Kg} \quad \rightarrow \quad \frac{2\ €}{1\ \cancel{Kg}} .\ 7\ \cancel{Kg} = 14\ €$ | $\frac{20\ €}{10\ \cancel{Kg}} .\ 7\ \cancel{Kg} = 14\ €$ |

**REGLA DE TRES DIRECTA**

Este problema tan sencillo, de una sola operación, se puede resolver de cuatro formas diferentes con reglas de tres. Todo se complica más, mucho más, cuando se dan mayor cantidad de datos y hay preguntas diferentes.

| Primera forma | Segunda forma | Tercera forma | Cuarta forma |
|---|---|---|---|
| *Se resuelve en cruz, sin necesidad de plantear ecuación*<br><u>Kilos</u> <u>Precio</u><br>10 20<br>7 x<br>$x = \frac{7\ .\ 20}{10} = 14\ €$ | *Plantear las relaciones de los Kg con su precio*<br>$\frac{10}{20} = \frac{7}{x} \rightarrow 10x = 20 \cdot 7$<br>$x = \frac{20\ .7}{10} = 14\ €$ | *Plantear las relaciones de los Kg con su precio pero la incógnita queda arriba y es más fácil de despejar*<br>$\frac{20}{10} = \frac{x}{7} \rightarrow 10x = 20 \cdot 7$<br>$x = \frac{20\ .7}{10} = 14\ €$ | *Plantear las relaciones de los Kg por una parte y de los precios por otra parte*<br>$\frac{10}{7} = \frac{20}{x} \rightarrow 10x = 20 \cdot 7$<br>$x = \frac{20\ .7}{10} = 14\ €$ |

**PROPORCIONALIDAD INVERSA** $\boxed{a.b=k}$

*Problema 5*- Un grupo de 15 personas hacen un trabajo en 7 días ¿Cuánto tardarán 5 personas?

Si aumenta el número de personas realizando un trabajo disminuye el número de días. Y si disminuye el número de personas aumenta el número de días. Es una proporcionalidad inversa.

<table>
<tr><th colspan="2">Regla de tres inversa</th><th>Ecuación de proporcionalidad inversa</th></tr>
<tr>
<td>Primera forma:<br>no se resuelve en cruz como la directa, sino horizontalmente<br>Personas días<br>15 → 7<br>5 → x<br><br>15.7 = 5x<br><br>$x=\frac{15.7}{5}=21 días$</td>
<td>Segunda forma:<br>cambiando el orden y transformándola en regla de tres directa<br>Personas días<br>15 → 7<br>5 → x<br><br>Personas días<br>5 → 7<br>15 → x<br><br>$x=\frac{15.7}{5}=21 días$</td>
<td>$\boxed{a.b=c.d}$<br>$15\, personas \cdot 7\, días = 5\, personas \cdot x\, días$<br>$\frac{15\ \cancel{personas}.7\, días}{5\ \cancel{personas}}=21 días$<br><br>Constante de proporcionalidad inversa<br>$\boxed{a.b=k}$<br>$15\, personas \cdot 7\, días = 105\, personas \cdot día$<br>$\frac{105\ \cancel{personas}.día}{5\ \cancel{personas}}=21 días$</td>
</tr>
<tr>
<td>DETECCIÓN DE ERRORES GRACIAS AL USO DE LAS UNIDADES<br>$x=\frac{15\, personas.5\ \cancel{días}}{7\ \cancel{días}}=10,7\ personas$<br>(salen personas en vez de días)</td>
<td colspan="2">DETECCIÓN DE ERRORES POR NO CUMPLIR LAS PROPORCIONALIDAD INDIRECTA<br>Se detecta el error debido a la incoherencia con la proporcionalidad indirecta: son menos personas y tardan menos en hacer el trabajo.<br>$x=\frac{5\ \cancel{personas}\ .\ 7\, días}{15\ \cancel{personas}}=2,33 días$</td>
</tr>
</table>

Como se puede ver, es mucho más lógica la manera de resolver el problema usando la ecuación de proporcionalidad inversa que usando la regla de tres inversa.

**PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD MIXTA. REGLA DE TRES COMPUESTA**

Se soluciona mediante la combinación de dos o más reglas de tres simples, directas e inversas, encadenadas.

*Problema 10*- Si 12 excavadoras trabajando 10 días han removido 360 m$^3$ de tierra, cuántos días tardarán 8 excavadoras en remover 620 m$^3$ de tierra?

-Excavadoras y días mantienen una relación de proporcionalidad inversa: más excavadoras→menos días (se multiplican: $a.b=k$ )

-Excavadoras y m$^3$ tienen una relación de proporcionalidad directa: más excavadoras → más m$^3$ (se dividen: $\frac{a}{b}=k$ )

-Días y m$^3$ mantienen una relación de proporcionalidad directa: más m$^3$ → más días (se dividen: $\frac{a}{b}=k$ )

**Regla de tres compuesta**

| Excavadoras | m$^3$ | días |
|---|---|---|
| 12 | 360 | 10 |
| 8 | 620 | x |

*(nº de excavadoras: se cambia el orden para transformarla en relación directa)*

$$\frac{8}{12}\cdot\frac{360}{620}=\frac{10}{x}$$

$$\frac{8.360}{12.620}=\frac{10}{x}\rightarrow\frac{2880}{7440}=\frac{10}{x}$$

$$x=\frac{7440.10}{2880}=25,83\,días$$

Es un método muy mecánico, nada analítico

**Constante de proporcionalidad inversa y reducción a la unidad**

$\boxed{a.b=k}$

$$k=12\,excavadoras.10\,días=120\;excavadoras.día$$

$$\frac{360\,m^3}{120\,excavadoras.día}=3\frac{m^3}{excavadora.día}$$

$\boxed{\frac{a}{b}=k}$

$$\frac{1\,\cancel{excavadora}.día}{3\,\cancel{m^3}}\cdot\frac{620\,\cancel{m^3}}{8\,\cancel{excavadoras}}=25,83\,días$$

-El dato más relevante del problema es:

$3\frac{m^3}{excavadora.día}$ Con ello podemos calcular después de manera muy simple cuántos días, cuántas excavadoras o cuántos m$^3$ necesitamos.

**Constante de proporcionalidad inversa y reducción a la unidad encadenada**

$\boxed{a.b=k}$

$$k=12\,excavadoras.10\,días=120\;excavadoras.día$$

$\boxed{\frac{a}{b}=k}$

$$\frac{120\,\cancel{excavadoras}.día}{360\,\cancel{m^3}}\cdot\frac{620\,\cancel{m^3}}{8\,\cancel{excavadoras}}=25,83\,días$$

-La sencillez de resolución habla por sí misma. Pero en cambio no hemos hallado el dato principal.

VENTAJAS E INCONVENIENTES DE CADA MÉTODO

- REDUCCIÓN A LA UNIDAD (sin unidades)

  Se usa sobre todo en educación primaria, aunque también en secundaria.

  El mayor inconveniente es que los problemas se resuelven solo con números. No se utilizan las unidades más que para dar el resultado. Parece que así es más sencilla la resolución, pero en cambio dificulta la comprensión de la lógica interna del problema.

  Todos los niños saben que si suman manzanas con manzanas el resultado dará manzanas. Que si suman árboles con árboles el resultado dará árboles. Saben que no pueden sumar árboles con manzanas, ni restar árboles de manzanas. Pero se complican cuando comienzan a resolver problemas con multiplicaciones y divisiones. De multiplicar o dividir números siempre sale un número, pero ¿Cómo saber si es el número correcto? El uso de unidades ayudaría a detectar errores.

- REDUCCIÓN A LA UNIDAD (con unidades) y REDUCCIÓN A LA UNIDAD ENCADENADA

  En principio puede parecer más difícil, pero los problemas se resuelven de una forma clara y lógica.

  Es el único método que puede tener continuidad desde primaria a bachillerato. Si los estudiantes se acostumbran a este método desde primaria no deberían encontrar dificultad en la resolución de los problemas de secundaria. De hecho los problemas de secundaria son demasiado sencillos, se trabajan prácticamente los mismos problemas que en primaria. Se pierde demasiado tiempo enseñando las reglas de tres en vez de avanzar en el grado de dificultad.

  Al abordar el problema es imprescindible que el alumnado se pregunte si los datos mantienen una relación de proporcionalidad entre sí, y si esta es directa o inversa. Es un método analítico, no es un método mecánico como las reglas de tres.

  También tienen que fijarse en la coherencia entre unidades. El uso de unidades minimiza los errores.

**Reducción a la unidad con unidades VS Reducción a la unidad encadenada**:

Ventaja de la reducción a la unidad: se obtiene un dato relevante que puede ser usado para sucesivas cuestiones del mismo problema

Ventaja de la reducción a la unidad encadenada: si no se necesita el dato relevante, este sistema es más sencillo.

- REGLAS DE TRES

  Cuando los estudiantes llegan a secundaria no entienden los problemas porque no están habituados al uso de unidades. Los profesores pretendemos facilitar su comprensión y mejorar las posibilidades de éxito utilizando la primera forma de las reglas de tres que es un método muy mecánico “equis es igual a esto por esto, entre esto”, sin plantear la igualdad entre razones.

  Las reglas de tres tienen varios inconvenientes:

  - No usan unidades, lo que hace aumentar el número de errores
  - Se pueden resolver de muchas formas diferentes, lo que ayuda a la confusión

- PROPORCIONALIDAD
  - Puede mejorar con el uso de las unidades. Por ejemplo en el problema 4:

$$\frac{20\,€}{10\,kg} = \frac{x\,€}{7\,kg} \quad \rightarrow \quad x = \frac{20\,€ \cdot 7\,\cancel{Kg}}{10\,\cancel{Kg}} = 14\,€$$

El uso de unidades ayuda a detectar errores:

| | |
|---|---|
| Se detecta el error porque en vez de "euros" sale $\frac{kg.kg}{€}$ <br> $x = \frac{10\,kg \cdot 7kg}{20\,€} = 3{,}5\,\frac{kg.kg}{€}$ | Otro tipo de error puede ser debido a la incoherencia con la proporcionalidad directa. Se compran menos kilogramos pero en cambio el coste es mayor <br> $x = \frac{10kg\ .\ 20\,€}{7\,kg} = 28{,}6\,€$ |

**FÓRMULAS**

En enseñanza primaria se resuelven algunos problemas de física por el método de reducción a la unidad. Por ejemplo, para calcular el tiempo que tarda un coche en hacer un recorrido sabiendo la velocidad y la distancia;  o los litros que manan de una fuente según el tiempo y el caudal (aunque no se le llama caudal). Al comenzar la secundaria los mismos problemas se resuelven con fórmulas. Se tiene que poner en evidencia ante los alumnos el porqué del cambio de método.

Las fórmulas ya nos indican qué relación, directa $\boxed{k = \frac{a}{b}}$ o inversa $\boxed{a.b = k}$ mantienen las magnitudes entre sí.

*Nota: hay que tomar K como constante de proporcionalidad, no como constante física. En las fórmulas que siguen, las únicas constantes físicas son G (constante gravitatoria universal), g (constante gravitatoria de la tierra) y $C$ (velocidad de la luz). El valor del resto de magnitudes puede variar según el problema, pero las relaciones de proporcionalidad se mantienen.*

| | |
|---|---|
| $v = \frac{e}{t}$ | velocidad=espacio/tiempo<br>Espacio y tiempo son directamente proporcionales. Para una misma velocidad: si aumenta el espacio recorrido→aumenta el tiempo, y viceversa |
| $q = \frac{V}{t}$ | Caudal=Volumen/tiempo<br>El volumen es directamente proporcional al tiempo. Para un mismo caudal: si aumenta el volumen→aumenta el tiempo, y viceversa |
| $P = \frac{W}{t}$ | Potencia = Trabajo/tiempo<br>Trabajo y tiempo son directamente proporcionales. Para una misma potencia: si aumenta el tiempo→aumenta el trabajo, y viceversa |
| $F = m.a$ | Fuerza=masa. aceleración<br>Masa y aceleración son inversamente proporcionales entre sí. Para una misma fuerza:  si aumenta la masa→disminuye la aceleración y viceversa |
| $E = mgh$ | Energía potencial=masa. Aceleración de la  gravedad. altura<br>Masa y altura son inversamente proporcionales entre sí. Para una misma Energía:  si aumenta la altura→disminuye la masa y viceversa<br>(La aceleración de la gravedad es una constante física) |
| $V = S.l$ | Volumen=Superficie. longitud<br>Superficie y longitud son inversamente proporcionales entre sí. Para un mismo volumen:  si aumenta la superficie→disminuye la longitud y viceversa |

**EL FACTOR DE CONVERSIÓN**

El factor de conversión **sigue las reglas de la proporcionalidad**. Tiene un nombre específico porque se refiere únicamente al cambio de unidades. En primaria se comienza con las unidades de longitud, capacidad, masa y tiempo (trimestre, década, siglo). Los niños se equivocan a menudo por no tener claro si tienen que multiplicar o dividir. Esta dificultad disminuye **si se usan las unidades** y si se enseña su empleo en **forma de razón numérica.** El uso de las unidades les facilita la detección de errores y ya les indica si han de multiplicar o dividir.
Además, la mecánica de resolución de los factores de conversión familiariza a los estudiantes con el método de reducción a la unidad encadenada, que pueden seguir usando en el futuro.

| ¿Cuántos metros hay en 5 km? | ¿Cuántos Km son 5000 m? |
|---|---|
| ***Como se hace:***<br>5x1000=5 000 metros<br><br>**Mucho mejor:**<br>$5\,\cancel{km}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}=5000\,m$ | ***Como se hace:***<br>5000:1000= 5 Km<br><br>**Mucho mejor:**<br>$5000\,\cancel{m}\cdot\frac{1\ Km}{1000\ \cancel{m}}=5\,Km$ |
| Calcula cuántos meses son 3 trimestres. | Calcula cuántos trimestres son 9 meses  |
| ***Como se hace:***<br>3x3=9 meses<br><br>***Mucho mejor:***<br>$3\ \cancel{trimestres}\cdot\frac{3\,meses}{1\ \cancel{trimestre}}=9\,meses$ | ***Como se hace:***<br>$\begin{array}{l\|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$ → 9: 3= 3 trimestres<br>**Mucho mejor:**<br>$9\ \cancel{meses}\cdot\frac{1\,trimestre}{3\ \cancel{meses}}=3\,trimestres$ |

## CONCLUSIONES

Del análisis de los cuatro métodos analizados: reducción a la unidad, reglas de tres, constantes de proporcionalidad y fórmulas, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

USO DE UNIDADES

-Es imprescindible el uso de los números con sus unidades para comprender la lógica interna del problema y minimizar errores

GRAN DIVERSIDAD DE MÉTODOS

-Es mejor reducir la diversidad de métodos. Los más apropiados son el de la reducción a la unidad, la constante de proporcionalidad inversa y las fórmulas:

- -<u>Proporcionalidad directa</u>: la reducción a la unidad es el único método que puede ser utilizado desde primaria hasta el bachillerato. Se debe potenciar su uso para dar continuidad a los conocimientos adquiridos
  Se deben evitar las reglas de tres directas, sobre todo el método más mecánico
- -<u>Proporcionalidad inversa</u>: Parece más sencillo utilizar la ecuación de proporcionalidad inversa, pero esta ecuación no sirve para resolver los problemas de proporcionalidad compuesta. Por tanto es mejor usar la constante de proporcionalidad inversa. Así con un solo método se pueden resolver ambos tipos de problemas.
- -<u>Proporcionalidad compuesta</u> la forma más lógica es utilizar la constante de proporcionalidad inversa y después la reducción a la unidad

-Es fundamental el uso correcto de los factores de conversión en primaria (en forma de cociente) ya que son la base para aprender el método de reducción a la unidad encadenada

-Las fórmulas son muy apropiadas para la resolución de problemas de física, ya que expresan claramente las relaciones de proporcionalidad, directa o inversa, entre las magnitudes

-Para resolver problemas de estequiometría el método más sencillo es el de la reducción a la unidad encadenada

TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD

-La teoría de la proporcionalidad debe quedar impresa en la mente del alumnado. Se ha de tener siempre presente a la hora de abordar este tipo de problemas, sea cual sea el método que se use: $\boxed{\frac{a}{b}=k}$ $\boxed{a.b=k}$

-Es indispensable el trabajo en común del profesorado de matemáticas de primaria y secundaria, y del profesorado de matemáticas, de física y química y tecnología