

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduïm per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

- a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(7 pt)**
- b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(3 pt)**

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

- a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(5 pt)**
- b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(5 pt)**

P3. — En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:

- Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

- a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. **(3 pt)**
- b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(5 pt)**
- c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? **(2 pt)**

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \quad \text{per a } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Et proporcionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

- Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(7 pt)**
- A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(3 pt)**

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta? **(10 pt)**

P6. — Tirem dos daus no trucats. Considera els esdeveniments següents:

- En el primer dau ha sortit un 1.
- En el segon dau ha sortit un 1.
- La suma dels valors dels dos daus és 3.

- Calcula $P(A)$. **(3 pt)**
- Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**
- Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(4 pt)**

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

- Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(3 pt)**
- Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(4 pt)**
- Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(3 pt)**



P8. — Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$.

- a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? **(3 pt)**
- b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? **(4 pt)**

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtindrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$. Sospitem que la moneda està trucada si el nombre de cares **no** està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

- c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? **(3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.