

$$f(x) = y = \frac{2x^3}{x^2-4}$$

- Calculamos el dominio:

$$x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Asíntotas verticales

- Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{16}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

- Para $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{-16}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador > Grado del denominador con una diferencia de un grado $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal porque los límites tienden a valores infinitos

Asíntota Oblicua

La asíntota oblicua viene definida por:

$$y = mx + n = 2x + 0 = 2x$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3-4x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3-4x} = 2$$

Tenemos Asíntota Oblicua $y = 2x$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2-4} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Oblicua

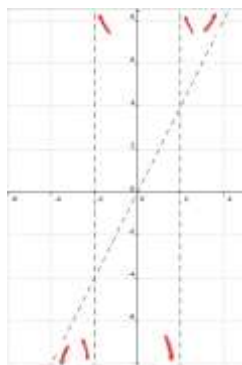
$$g(x) = \frac{2x^3}{x^2-4} - 2x = \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2-4} = \frac{8x}{x^2-4}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$



$$y = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$$

- Calculamos el dominio:

$$x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Asíntotas verticales

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

- Para $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

- Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador = Grado del denominador $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2$$

Tenemos una asíntota horizontal en $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Horizontal}$

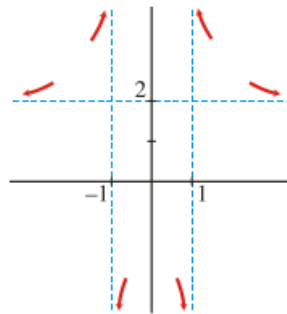
$$g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-1} - 2 = \frac{2x^2+1-2x^2+2}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-1}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$



$$f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$$

- Calculamos el dominio:

$$x^2 + 1 \neq 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{No existe ningún valor que anule el denominador} \rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

Asíntotas verticales

Como el $D(f) = \mathbb{R}$ no tendremos Asíntotas Verticales

Como el Grado del Numerador < Grado del denominador $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0$$

Tenemos una Asíntota Horizontal en $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Horizontal}$

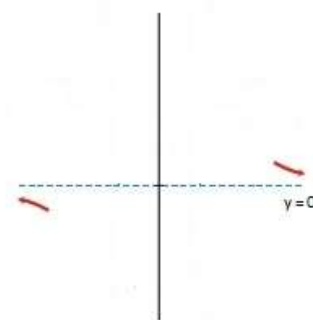
$$g(x) = \frac{6x}{x^2+1} - 0 = \frac{6x}{x^2+1}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$



$$y = \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36}$$

- Calculamos el dominio:

$$x^2 - 36 \neq 0 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-6, 6\}$$

Asíntotas verticales

- Para $x = -6$

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \frac{-792}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -6$

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

- Para $x = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Factorizamos tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x(x-6)(x-5)}{(x-6)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x(x-5)}{(x+6)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

No tendremos una asíntota vertical en $x = 6$

Como el Grado del Numerador > Grado del denominador con una diferencia de un grado $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal porque los límites tienden a valores infinitos

Asíntota Oblicua

La asíntota oblicua viene definida por:

$$y = mx + n = x - 11$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^3 - 36x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^3 - 36x} = 1 \quad \text{Tenemos Asíntota Oblicua } y = x - 11$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x^2 + 30x - x^3 + 36x}{x^2 - 36} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11x^2 + 66x}{x^2 - 36} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11x^2 + 66x}{x^2 - 36} = -11$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Oblicua

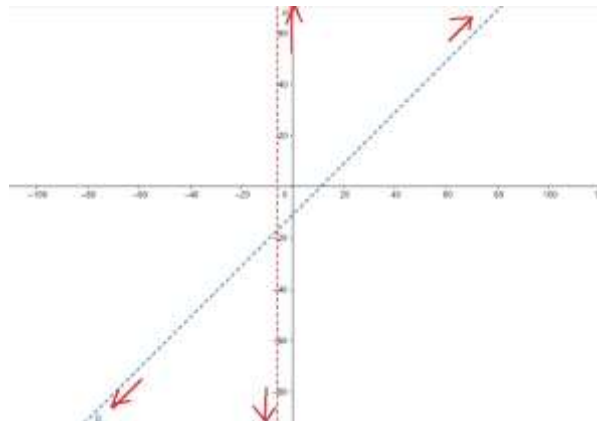
$$g(x) = \frac{x^3 - 11x^2 + 30x}{x^2 - 36} - (x - 11) = \frac{x^3 - 11x^2 + 30x - x^3 + 11x^2 + 36x - 396}{x^2 - 36} = \frac{66x - 396}{x^2 - 36}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{66x - 396}{x^2 - 36} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{66x - 396}{x^2 - 36} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$



$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6}$$

- Calculamos el dominio:

$$x^2 + x - 6 \neq 0 \rightarrow x = -3 \text{ y } x = 2 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

Asíntotas verticales

- Para $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \frac{-15}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

- Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Factorizamos tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{(x+3)} = \frac{8}{5}$$

No tendremos una asíntota vertical en $x = 2$

Como el Grado del Numerador > Grado del denominador con una diferencia de un grado $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal porque los límites tienden a valores infinitos

Asíntota Oblicua

La asíntota oblicua viene definida por:

$$y = mx + n = x - 1$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 6x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 6x} = 1 \quad \text{Tenemos Asíntota Oblicua } y = x - 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - x^3 - x^2 + 6x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^2 + x - 6} = -1$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Oblicua

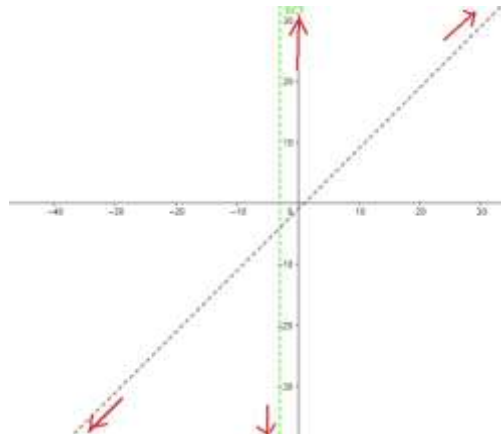
$$g(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} - (x - 1) = \frac{x^3 - 4x - x^3 - x^2 + 6x + x^2 + x - 6}{x^2 + x - 6} = \frac{3x - 6}{x^2 + x - 6}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 6}{x^2 + x - 6} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 6}{x^2 + x - 6} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$



$$f(x) = \frac{-x-3}{-x^2-5x+14}$$

- Calculamos el dominio:

$$-x^2 - 5x + 14 \neq 0 \rightarrow x=2 \text{ y } x=-7 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-7, 2\}$$

Asíntotas verticales

- Para $x = -7$

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -7$

- Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{-5}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

Tenemos una asíntota vertical en $x = 2$

Como el Grado del Numerador < Grado del denominador $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = 0$$

Tenemos una Asíntota Horizontal en $y = 0$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

- Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Horizontal}$

$$g(x) = \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} - 0 = \frac{-x-3}{-x^2-5x+14}$$

- Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{-x^2-5x+14} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

