10 AZAR Y PROBABILIDAD

Página 245

Resuelve

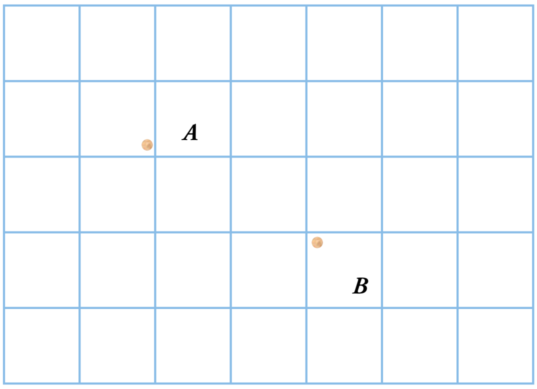
Obtención experimental de la probabilidad

Cuadriculamos un folio con cuadrados de 3 cm × 3 cm.

Si dejamos caer sobre él una moneda de 2 céntimos de euro (19 mm de diámetro), puede caer «tocando raya», como *A*, o «sin tocar raya», como *B*.

Vamos a estimar la probabilidad del suceso *S*:

S = «LA MONEDA CAE SIN TOCAR RAYA»



Para ello, se realiza la experiencia muchas veces y se calcula la frecuencia relativa del suceso *S*.

Supongamos que 30 personas (los alumnos de una clase) lo realizan 100 veces cada una (un total de 3 000 experiencias), y que se contabiliza que el suceso S ha ocurrido 385 veces.

La frecuencia relativa y la probabilidad serán:

$$fr(S) = \frac{385}{3\,000} = 0{,}128 \rightarrow P[S] \approx 0{,}13$$

- **Estima tú la probabilidad de *S* lanzando 100 veces una moneda de 2 céntimos sobre una cuadrícula como la que se acaba de describir.**

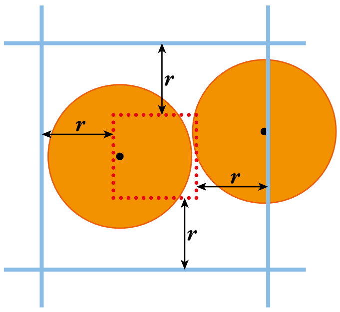
  Experiencia práctica para el alumno.

Cálculo matemático de la probabilidad

Resolvemos ahora el problema anterior de forma matemática.

La posición de la moneda queda determinada por su centro.

¿En qué puntos de la cuadrícula debe quedar el centro de la moneda para que esta no toque raya? Es claro que debe estar en el interior del cuadrado pequeño, es decir, su distancia a cada raya debe ser mayor que el radio de la moneda.



Área del cuadrado grande: $3^2 = 9$ cm²

Área del cuadrado pequeño: $(3 - 1{,}9)^2 = 1{,}21$ cm²

Probabilidad: $P[S] = \frac{1{,}21}{9} = 0{,}134$

La probabilidad obtenida por este método (0,134) ha sido sensiblemente igual a la obtenida por el método experimental (0,13).

- **Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que un botón de 1 cm de diámetro «no toque raya» en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm.**

  Área del cuadrado grande = $3^2 = 9$ cm²

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4$ cm²

  $$P = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

1 EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

Página 246

1 Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

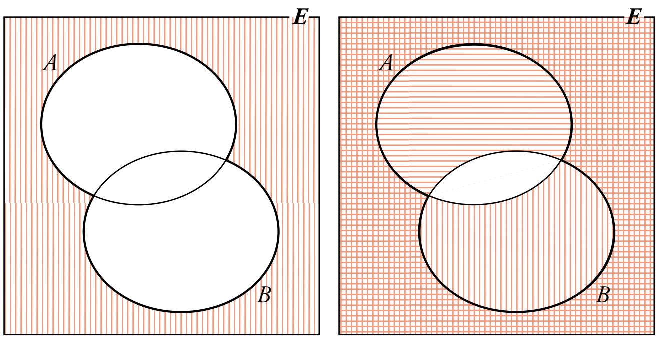
b) Suceso elemental: $\{2\}$

Sucesos no elementales: $\{1, 2\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$

c) Esta experiencia tiene $2^4 = 16$ sucesos.

Página 247

2 Observa la justificación gráfica de la primera ley de Morgan, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$:



En el primer dibujo tenemos $\overline{A \cup B}$ en azul.

En el segundo, $\overline{A}$ está marcado con líneas verticales, y $\overline{B}$, con líneas horizontales, por lo que su intersección se da donde coinciden ambas → $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

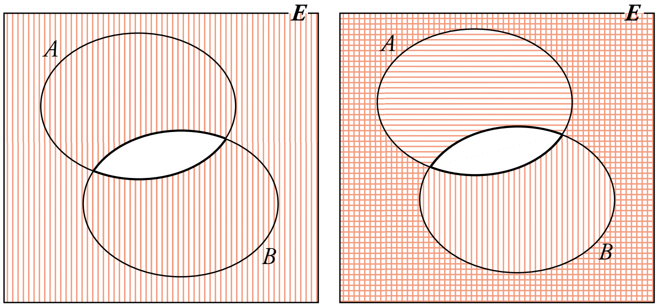
Justifica gráficamente, de forma similar, las siguientes propiedades:

a) Segunda ley de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) $A - B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

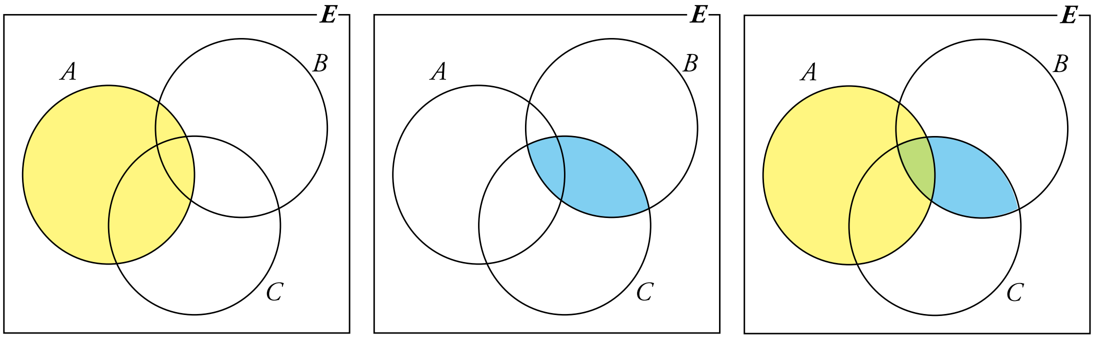
d) $(A \cup B) - (A \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

a) 

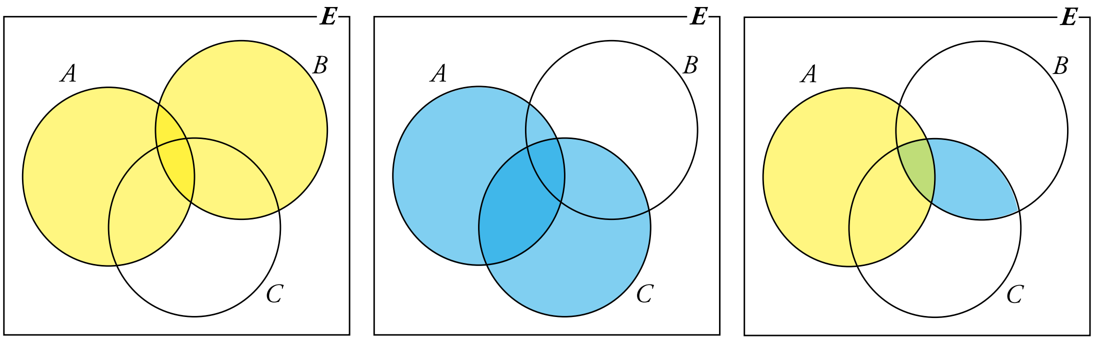
En el primer dibujo, $\overline{A \cap B}$ supone todo el espacio con rayado vertical.

En el segundo dibujo, $\overline{A} \cup \overline{B}$ supone todo el espacio que tenga rayas, sean del tipo que sean.

Por tanto, coinciden.

b) 

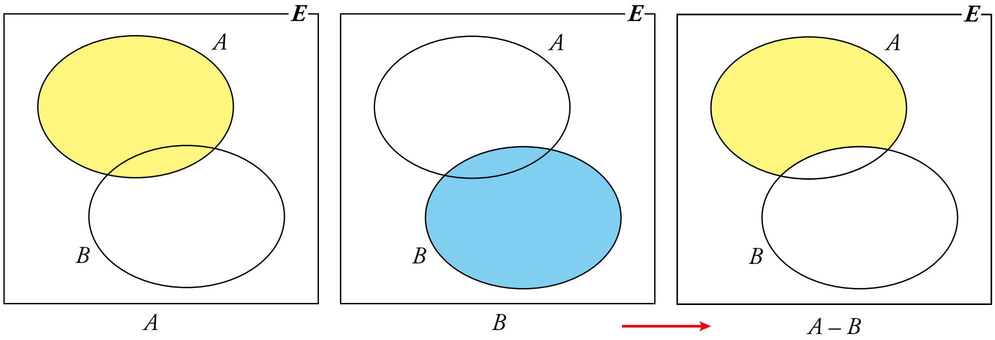
A $\quad$ $B \cap C$ $\quad \longrightarrow \quad$ $A \cup (B \cap C)$

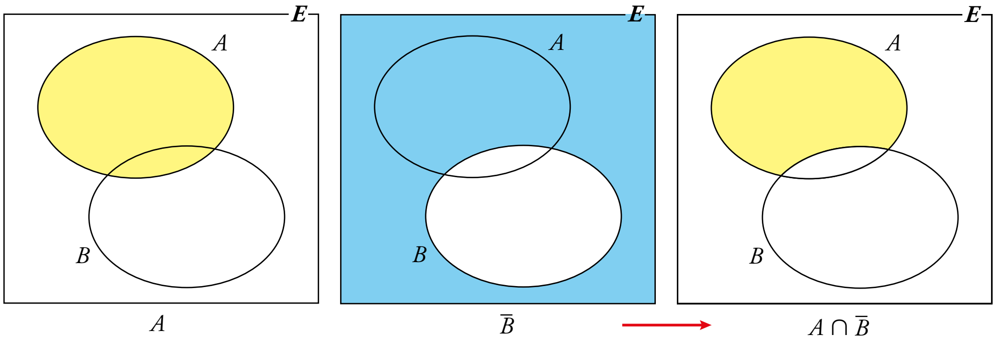


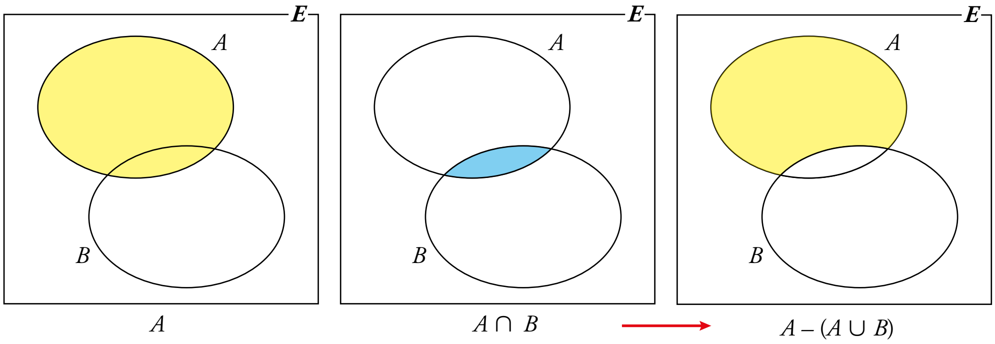
$A \cup B$ $\quad$ $A \cup C$ $\quad \longrightarrow \quad$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Por tanto son iguales.

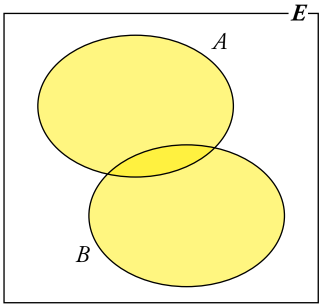
c) $A - B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$



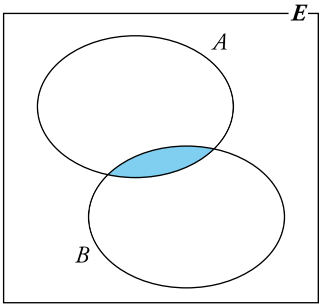




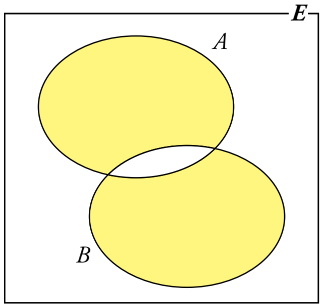
d) $(A \cup B) - (A \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$



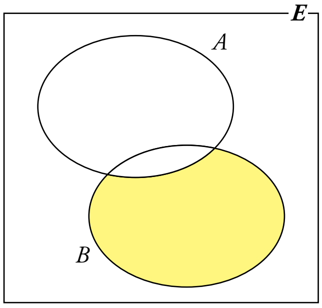
$A \cup B$



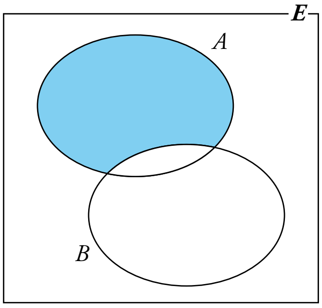
$A \cap B$



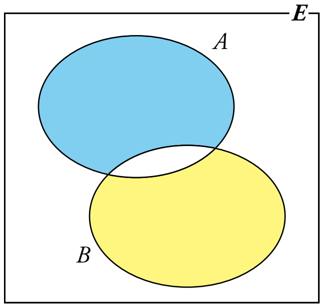
$(A \cup B) - (A \cap B)$



$\overline{A} \cap B$



$A \cap \overline{B}$



$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

2 FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

Página 248

1 **[La lectura de los enunciados permite trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) Estoy jugando con un dado correcto y en las últimas 20 jugadas no he conseguido ningún «5». Según la *ley de los grandes números*, en la siguiente jugada es muy muy probable que ya me salga «5».

b) Aunque en las últimas 20 tiradas no haya salido ningún «5», la probabilidad de que ahora salga «5» sigue siendo la misma que antes de la *racha*: 1/6 (el azar «no tiene memoria»).

a) Falso. La ley de los grandes números solo dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a la probabilidad del mismo cuando se repite el experimento un número muy alto de veces. El resultado de la siguiente jugada apenas afecta a la correspondiente frecuencia relativa.

b) Verdadero. Los resultados de los diferentes lanzamientos del dado son independientes entre sí.

Página 249

2 **Conocemos las siguientes probabilidades:**

$$P[A] = 0{,}4 \qquad P[B] = 0{,}7 \qquad P[\overline{A} \cup \overline{B}] = 0{,}8$$

Calcula $P[(\overline{A \cap B})]$, $P[A \cap B]$, $P[A \cup B]$.

$P[\overline{A}] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[\overline{B}] = 1 - P[B] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[(\overline{A \cap B})] = P[\overline{A} \cup \overline{B}] = 0{,}8;\ \ P[A \cap B] = 1 - P[\overline{A \cap B})] = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$

3 **Sabemos que:**

$$P[M \cup N] = 0{,}6 \quad P[M \cup N] = 0{,}1 \quad P[\overline{M}] = 0{,}7$$

Calcula $P[M]$, $P[N]$, $P[\overline{N}]$, $P[\overline{M} \cap \overline{N}]$.

$P[M] = 1 - P[\overline{M}] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[M \cup N] = P[M] + P[N] - P[M \cup N] \ \rightarrow\ P[N] = P[M \cup N] + P[M \cup N] - P[M] =$

$= 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}4$

$P[\overline{N}] = 1 - P[N] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[\overline{M} \cap \overline{N}] = P[\overline{M \cup N}] = 1 - P[(M \cup N)] = 0{,}4$

3 ▸ LEY DE LAPLACE

Página 250

Hazlo tú

Repite el problema con los datos siguientes:

P[COPA] = $\frac{1}{2}$, P[AS] = $\frac{1}{4}$, P[ni COPA ni AS] = $\frac{5}{16}$. Halla P[AS DE COPAS] y di cuántas cartas hay.

Llamamos A al suceso AS y C al suceso COPAS.

$$P[\text{AS DE COPAS}] = P[A \cup C] = P[A] + P[C] - P[A \cup C] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P[A \cup C] =$$

$$= \frac{3}{4} - P[A \cup C] = \frac{3}{4} - \left[1 - P[(A \cup C)']\right] = \frac{3}{4} - 1 + P[(A \cup C)'] =$$

$$= -\frac{1}{4} + P[A' \cap C'] = -\frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$$

Como el suceso AS DE COPAS es un suceso elemental y todas las demás cartas tienen la misma probabilidad de salir, en el mazo hay 16 cartas.

Página 251

1 **Lanzamos un dado «chapucero» mil veces. Obtenemos:**

$f(1) = 117$ $f(2) = 302$ $f(3) = 38$ $f(4) = 234$ $f(5) = 196$ $f(6) = 113$

Estima las probabilidades de las distintas caras y, basándote en ellas, calcula las probabilidades de estos sucesos: PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}.

$P[1] = \frac{117}{1\,000} = 0,117$ $P[2] = 0,302$ $P[3] = 0,038$

$P[4] = 0,234$ $P[5] = 0,196$ $P[6] = 0,113$

P[PAR] = 0,302 + 0,234 + 0,113 = 0,649

P[MENOR QUE 6] = 1 – P[6] = 1 – 0,113 = 0,887

P[{1, 2}] = 0,117 + 0,302 = 0,419

2 Parada de 5 minutos. **[Las dudas que surjan al calcular las probabilidades que plantea el enunciado pueden ser tratadas según esta técnica].**

¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos? ¿Y la de obtener 9? ¿Y la de obtener 4?

Los casos favorables al primer suceso son: (2, 6); (3, 4); (4, 3) y (6, 2). Luego, $P[12] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

El segundo suceso solo tiene un caso favorable, (3, 3). Luego, $P[9] = \frac{1}{36}$.

Los casos favorables al tercer suceso son: (1, 4); (2, 2) y (4, 1). Luego, $P[4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3 **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2? ¿Y la probabilidad de que la diferencia sea 1?**

Si suponemos que el orden en el que se restan las puntuaciones de los dados es indiferente, al no ser los dados distinguibles, las probabilidades serán:

- Los casos para que la diferencia sea 2 son: (1, 3); (2, 4); (3, 5); (4, 6) y los casos «simétricos». Por tanto:

$$P[2] = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

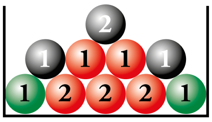
- Los casos en los que la diferencia es 1 son: (1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6) y los casos «simétricos». Por tanto:

$$P[1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

4 PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES

Página 253

1 Observa las bolas que hay en la urna.



a) Completa el cuadro de doble entrada en el que se reparten las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

	V	R	N	TOTAL
1		2		
2		3		
TOTAL		5		

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las probabilidades condicionadas: P[1/ROJO], P[1/VERDE], P[1/NEGRO], P[2/ROJO], P[2/VERDE], P[2/NEGRO], P[ROJO/1], P[VERDE/1].

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

a)

	V	R	N	TOTAL
1	2	2	2	6
2	0	3	1	4
TOTAL	2	5	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$P[\text{N}] = \dfrac{3}{10} = 0,3$

$P[\text{V}] = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

$P[1] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

$P[2] = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

d) $P[1/\text{R}] = \dfrac{2}{5};\ P[1/\text{V}] = 1;\ P[1/\text{N}] = \dfrac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \dfrac{3}{5};\ P[2/\text{V}] = 0;\ P[2/\text{N}] = \dfrac{1}{3}$

$P[\text{R}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3};\ P[\text{V}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

e) No son independientes.

5 PRUEBAS COMPUESTAS

Página 254

1 **¿Verdadero o falso?**

a) En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. Las dos extracciones son independientes.

Por tanto: $P[1.^a \text{ ROJA y } 2.^a \text{ VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^a] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^a] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

b) Tenemos dos bolsas, cada una de ellas con 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola de la primera bolsa y una bola de la segunda bolsa. Las dos extracciones son independientes.

Por tanto: $P[1.^a \text{ ROJA y } 2.^a \text{ VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^a] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^a] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

a) Falso, porque la composición de la bolsa, cuando se va a extraer la segunda bola, depende de la primera bola extraída. En este caso las pruebas compuestas no son independientes.

b) Verdadero. Al extraer de dos bolsas distintas, las pruebas son independientes.

2 **Calcula la probabilidad de obtener TRES CUATROS al lanzar tres dados.**

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0,0046$$

3 **Calcula la probabilidad de que no nos salga el número 6 (NINGÚN SEIS) al lanzar cuatro dados (cuatro veces NO SEIS).**

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,48$$

4 **Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS).**

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,48 = 0,52$

5 **Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dados.**

$$P[\text{NINGÚN } 6] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,335$$

$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,335 = 0,665$

Página 255

6 **¿Verdadero o falso?**

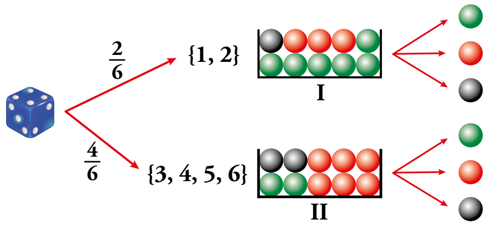
En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. La segunda extracción depende del resultado de la primera. Por tanto:

$$P[1.^a\ 🔴\ \text{y}\ 2.^a\ 🟢] = P[🔴\ \text{en}\ 1.^a] \cdot P[🟢\ \text{en}\ 2.^a/🔴\ \text{en}\ 1.^a] = = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Verdadero, porque cuando se va a extraer la segunda bola, queda una bola menos en la urna y todavía están todas las bolas verdes dentro de ella. Las dos experiencias son dependientes.

7 **Tenemos un dado y las dos urnas descritas en el dibujo que aparece a continuación.**

Lanzamos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II. Extraemos una bola de la urna correspondiente.

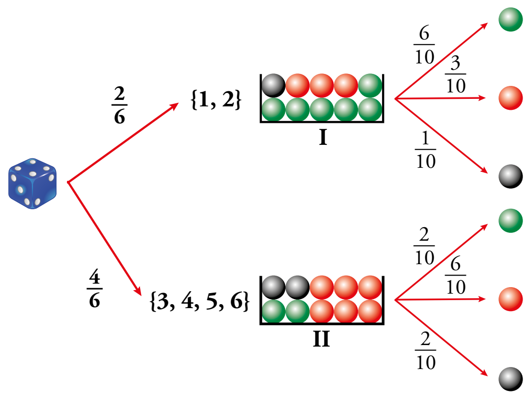


a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.

b) Halla:

$P[\{3, 4, 5, 6\}\ \text{y}\ 🔴]$ $\quad$ $P[🟢/1]$ $\quad$ $P[🔴/5]$ $\quad$ $P[2\ \text{y}\ 🟢]$

a)



b) $P[\{3, 4, 5, 6\}\ \text{y}\ 🔴] = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{6}{10} = \dfrac{2}{5}$

$P[🟢/1] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$P[🔴/5] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$P[2\ \text{y}\ 🟢] = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{6}{10} = \dfrac{1}{10}$

6 PROBABILIDAD TOTAL

Página 257

Hazlo tú

1 **En el ejercicio anterior, calcula P[🟢] y P[⚫].**

Comprueba que la suma P[🔴] + P[🟢] + P[⚫] es igual a 1.

P[🟢] $= \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{3}$

P[⚫] $= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{6}$

P[🔴] + P[🟢] + P[⚫] $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

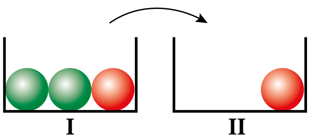
Hazlo tú

2 **En el ejercicio anterior, si la probabilidad de que cace al ratón es 0,44, entonces la probabilidad de que escape ($\nearrow$) es 0,56 ($P[\nearrow] = 1 - P[+] = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$). Calcula dicha probabilidad, $P[\nearrow]$, siguiendo todo el proceso.**

$P[\nearrow] = = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}56$

Piensa y practica

1 **¿Verdadero o falso?**



Primero extraemos una bola de I y la introducimos en II. Después extraemos una bola de II.

a) P[2.ª 🔴/1.ª 🟢] $= \frac{1}{2}$

b) P[2.ª 🟢/1.ª 🟢] $= \frac{1}{2}$

c) P[2.ª 🔴/1.ª 🔴] $= \frac{1}{3}$

d) P[1.ª 🟢 y 2.ª 🔴] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Solo debemos fijarnos en la composición de la segunda urna después de haber pasado cada bola.

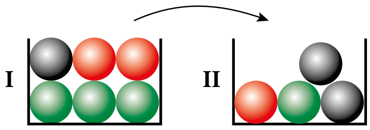
a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso. P[2.ª 🔴/1.ª 🔴] $= \frac{2}{2} = 1$

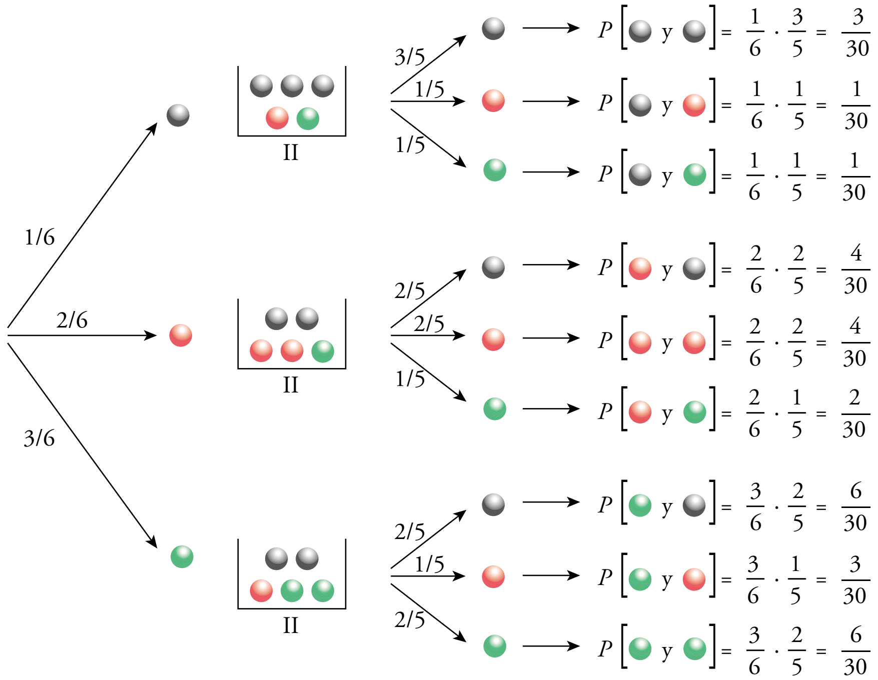
d) Falso. P[1.ª 🟢 y 2.ª 🔴] $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

2 **Tenemos dos urnas:**



La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja **b) verde** **c) negra**



a) $P[2.^{a}$ 🔴$] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2.^{a}$ 🟢$] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2.^{a}$ ⚫$] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

7 PROBABILIDAD «A POSTERIORI». FÓRMULA DE BAYES

Página 259

Hazlo tú

1 **Si lo que se obtiene finalmente es bola roja, ¿qué probabilidad hay de que provenga de la URNA I? Es decir, calcula** $P[\mathrm{I}/🔴]$**.**

$$P[\mathrm{I}/🔴] = \frac{P[\mathrm{I} \text{ y } 🔴]}{P[🔴]} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}} = \frac{1}{5}$$

Piensa y practica

1 Parada de 5 minutos. **[Las diferencias que surjan al analizar la información aportada por la gráfica pueden ser analizadas según esta técnica].**

Verdadero o falso?

En el ejemplo de los teléfonos GUAY y PUAF visto anteriormente, sabemos de un teléfono que, pasado el tiempo prudencial, NO TIENE AVERÍAS. Ignoramos la marca pero podemos calcular sus probabilidades.

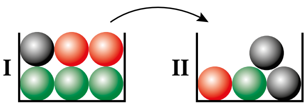
$$100 \begin{cases} \text{G, } 80 \xrightarrow{39/40} \text{G y NO AV, } 78 \\ \text{P, } 20 \xrightarrow{6/10} \text{P y NO AV, } 12 \end{cases} \rightarrow \text{NO AV, } 90$$

$$P[\text{GUAY}/\text{NO AV}] = \frac{78}{90} = 0{,}87$$

$$P[\text{PUAF}/\text{NO AV}] = \frac{12}{90} = 0{,}13$$

Verdadero. Este razonamiento es análogo al desarrollado en el ejemplo de la página anterior.

2



Se extrae una bola de I y se introduce en II. Se remueve y se extrae una bola de II.

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? $P[1.^a ⚫/2.^a ⚫]$

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido negra? $P[1.^a ⚫/2.^a 🔴]$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde siendo verde la segunda? $P[1.^a 🟢/2.^a 🟢]$

a) $P[1.^a ⚫/2.^a ⚫] = \dfrac{P[⚫ \text{ y } ⚫]}{P[2.^a ⚫]} = \dfrac{3/30}{13/30} = \dfrac{3}{13}$

b) $P[1.^a ⚫/2.^a 🔴] = \dfrac{P[⚫ \text{ y } 🔴]}{P[2.^a 🔴]} = \dfrac{1/30}{8/30} = \dfrac{1}{8}$

c) $P[1.^a 🟢/2.^a 🟢] = \dfrac{P[🟢 \text{ y } 🟢]}{P[2.^a 🟢]} = \dfrac{6/30}{9/30} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 260

1. Propiedades de las probabilidades

Hazlo tú

- **a) Con los mismos datos, calcula:**

  $$\boldsymbol{P[A \cap \overline{B}]} \text{ y } \boldsymbol{P[A \cup \overline{B}]}$$

  b) ¿Son $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ incompatibles?

a) $P[\overline{B}/A]\ \dfrac{P[A \cap \overline{B}]}{P[A]}$

Por ser A y B independientes: $P[\overline{B}/A] = P[\overline{B}] = 0{,}75$. Sustituyendo con los datos que tenemos del ejercicio:

$$0{,}75 = \frac{P[A \cap \overline{B}]}{0{,}4} \longrightarrow P[A \cap \overline{B}] = 0{,}75 \cdot 0{,}4 = 0{,}3$$

$$P[A \cup \overline{B}] = P[A] + P[\overline{B}] - P[A \cap \overline{B}] = 0{,}4 + 0{,}75 - 0{,}3 = 0{,}85$$

b) A y B son incompatibles si su intersección es nula.

$P[A \cap B] = 0{,}10 \longrightarrow$ no son incompatibles.

2. Lanzamiento de tres dados

Hazlo tú

- **En el lanzamiento de dos dados rojos y uno verde, halla la probabilidad de que la puntuación obtenida en el verde coincida con la diferencia de las puntuaciones (mayor – menor) de los dos dados rojos.**

  La resta de los dos dados rojos será:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P[0] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P[1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P[2] = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

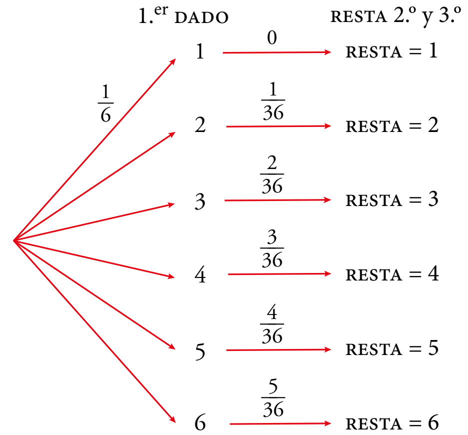
$$P[3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P[4] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P[5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P[6] = 0$$

Hacemos un diagrama en árbol para hallar la probabilidad de que la puntuación del dado verde (1.er dado) coincida con la resta de los otros dos:



Por tanto la probabilidad de que coincida el dado verde con la resta de los dos dados rojos será:

$$P = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{18}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\cdot 0=\frac{5}{36}=0,13\widehat{8}$$

Página 261

4. Probabilidades en tablas de contingencia

Hazlo tú

- **Calcula P[VID/MAY].**

$P[\text{VID/MAY}] = \dfrac{13}{120}$ (De los 120 mayores, 13 practican videojuegos).

Página 262

5. Probabilidad condicionada

Hazlo tú

- **Repite el apartado b) del problema suponiendo que fueran 6 cajones y se abrieran los cinco primeros, sin que estuviera en ninguno de los cinco.**

$P[\text{sí y OTRO}] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{12}$

$P[\text{sí y 6.º}] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$P[\text{6.º}] = \dfrac{1}{12}$

$P[\text{OTRO}] = P[\text{sí y OTRO}] + P[\text{NO y OTRO}] = \dfrac{5}{12}+0=\dfrac{5}{12}$

$P[\text{6.º/no OTRO}] = \dfrac{P[\text{6.º y no OTRO}]}{P[\text{no OTRO}]} = \dfrac{P[\text{6.º}]}{1-P[\text{OTRO}]} = \dfrac{1/12}{1-7/12}=\dfrac{1}{7}$

6. El juego de la suma

Hazlo tú

- **Repite el problema, suponiendo que ganáramos si la suma fuera 3 y perdiéramos si la suma fuera 7.**

Teniendo en cuenta los posibles resultados de las sumas de 2 dados:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tenemos que $P[3] = \dfrac{1}{18}$ y $P[\text{OTRO}] = \dfrac{7}{9}$.

Por tanto:

$$P[\text{GANAR}] = \frac{1}{18} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{18} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{18} + \ldots = \frac{1}{18} \cdot \left[1 + \frac{7}{9} + \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{1}{18} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{4}$$

Como en el ejercicio resuelto hemos realizado la suma infinita teniendo en cuenta que:

$a_1 = 1$

$r = \dfrac{7}{9}$

También podríamos haber tenido en cuento que de cada 4 veces ganamos una, ya que la probabilidad de sacar 7 es 3 veces mayor que la probabilidad de sacar 3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 263

1. Propiedades de las probabilidades

- **De los sucesos A y B se sabe que: $P[A] = 0{,}4$; $P[B] = 0{,}5$; $P[\overline{A \cap B}] = 0{,}3$**

Hallar:

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A \cap B]$**

a) Podemos relacionar $P[A \cup B]$ con $P[\overline{A} \cap \overline{B}]$, probabilidad conocida, aplicando una de las leyes de Morgan: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Por tanto, $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] \rightarrow$

$\rightarrow P[A \cup B] = 1 - P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b) Para calcular $P[A \cap B]$ aplicamos la igualdad:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}5 - P[A \cap B] \rightarrow P[A \cap B] = 0{,}2$

2. Probabilidades en experiencias compuestas

- **Un dado está trucado de manera que son iguales las probabilidades de obtener 2, 4 o 6; también son iguales las probabilidades de sacar 1, 3 o 5, y la probabilidad de obtener 2 es el doble que la de sacar 1.**

Deducir razonadamente cuál es la probabilidad de que, al lanzar el dado dos veces, se obtenga una suma de puntos igual a 7.

Llamamos:

$$p = P[1] = P[3] = P[5].$$

Entonces:

$$P[2] = P[4] = P[6] = 2p$$

Ahora bien:

$$1 = P[E] = P[1] + P[3] + P[5] + P[2] + P[4] + P[6] = p + p + p + 2p + 2p + 2p = 9p$$

Por tanto:

$$1 = 9p \rightarrow p = \frac{1}{9}$$

Las parejas cuya suma es 7 son: (1, 6); (2, 5), (3, 4) y sus «simétricas».

Cada pareja está formada por un número par y uno impar. Como los lanzamientos son independientes entre sí, la probabilidad de cada pareja es $\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{81}$.

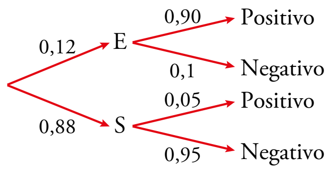
Por tanto:

$$P[\text{SUMA } 7] = 6 \cdot \frac{2}{81} = \frac{12}{81} = 0{,}15$$

3. Probabilidad «a posteriori»

- **El 12 % de la población de un país padece cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable.**
  - **Da positivo en el 90 % de los casos de personas realmente enfermas.**
  - **Da positivo en el 5 % de personas sanas.**

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positivo?

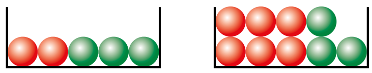


$P[\text{POSITIVO}] = 0{,}12 \cdot 0{,}9 + 0{,}88 \cdot 0{,}05 = 0{,}152$

$$P[\text{SANAS/POSITIVO}] = \frac{P[\text{SANAS y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}05}{0{,}152} = 0{,}29$$

4. Experiencias compuestas. Probabilidad total y probabilidad «a posteriori»

- **Tenemos estas dos urnas:**



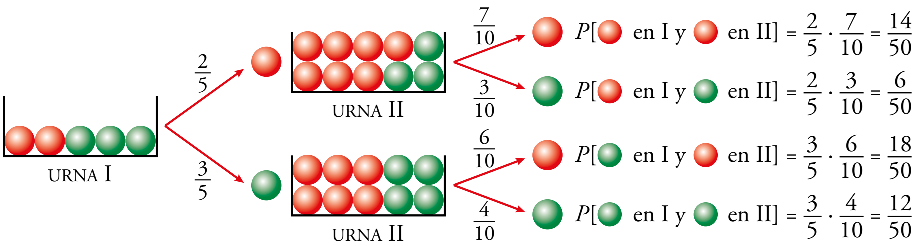
URNA I URNA II

Se extrae al azar una bola de la urna I y se deposita en la urna II. Luego, se extrae al azar una bola de la urna II. Calcular las siguientes probabilidades:

a) *P*[🔴 en I]; b) *P*[🔴 en II / 🔴 en I]; c) *P*[🟢 en I]; d) *P*[🔴 en II / 🟢 en I];

e) *P*[🔴 en II]; f) *P*[🟢 en II]; g) *P*[🔴 en I / 🔴 en II]

Construimos un diagrama en árbol.



a) *P*[🔴 en I] = 2/5 (Sacar bola roja de la URNA I.)

b) *P*[🔴 en II / 🔴 en I] = 7/10 (Sacar bola roja de la URNA II con una roja de más.)

c) *P*[🟢 en I] = 3/5 (Sacar bola verde de la URNA I.)

d) *P*[🔴 en II / 🟢 en I] = 6/10 (Sacar bola roja de la URNA II con una verde de más.)

e) *P*[🔴 en II] = *P*[🔴 en I y 🔴 en II] + *P*[🟢 en I y 🔴 en II] = $\frac{14}{50} + \frac{18}{50} = \frac{32}{50}$; o bien

P[🔴 en II] = *P*[🔴 en I] · *P*[🔴 en II / 🔴 en I] + *P*[🟢 en I] · *P*[🔴 en II / 🟢 en I] =

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{32}{50}$$

f) *P*[🟢 en II] = 1 – *P*[🔴 en II] = $1 - \frac{32}{50} = \frac{18}{50}$

g) *P*[🔴 en I / 🔴 en II] = $\dfrac{P[\text{🔴 en I y 🔴 en II}]}{P[\text{🔴 en II}]} = \dfrac{14/50}{32/50} = \dfrac{14}{32}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 264

Para practicar

Espacio muestral. Sucesos

1 **Di cuál es el espacio muestral correspondiente a cada experiencia aleatoria:**

a) Lanzar dos monedas diferentes y decir lo que sale en cada una.

b) Lanzar dos monedas y anotar el número de caras.

c) Lanzar una moneda y un dado.

d) Extraer una carta de una baraja y anotar el palo.

e) Lanzar una pelota a canasta.

f) Preguntar a una persona por el día de la semana en el que cae su cumpleaños este año.

a) E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}

b) E = {0, 1, 2}

c) E = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (+, 1), (+, 2), (+, 3), (+, 4), (+, 5), (+, 6)}

d) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

e) E = {ENCESTAR, NO ENCESTAR}

f) E = {LUNES, MARTES, MIÉRCOLES, JUEVES, VIERNES, SÁBADO, DOMINGO}

2 **Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los sucesos A, FIGURA; B, BASTOS, y C, MENOR QUE 4.**

a) Expresa en función de A, B y C estos sucesos:

- **Se realiza alguno de los tres.**
- **No se realiza ninguno de los tres.**
- **Se realizan los tres.**
- **Alguno no se realiza.**
- **Se realiza el A o el B, pero no el C.**

b) Describe los elementos correspondientes a cada uno de los sucesos del apartado a).

a) • $A \cup B \cup C$

- $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- $A \cap B \cap C$
- $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
- $(A \cup B) \cap \overline{C}$

b) • Cualquier figura o basto o cualquier carta menor que 4.

- Oros, copas o espadas mayores o iguales que 4 que no sean figuras.
- Este suceso es imposible porque no hay figuras con numeración menor que 4.
- Este suceso es seguro porque entre las cartas que no son figuras y las que tienen numeración mayor o igual que 4 reunimos toda la baraja.
- Cualquier figura o cualquier basto con numeración mayor o igual que 4.

3 **Lanzamos tres monedas y anotamos el resultado, C y +, de cada una. Consideramos los sucesos A = «Sacar más caras que cruces» y B = «Sacar una o dos cruces». Halla todos los casos que integran los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.**

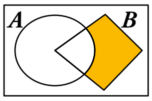
A = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C), (C, C, C)}

B = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +)}

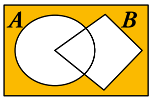
$A \cup B$ = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +), (C, C, C)}

$A \cap B$ = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C)}

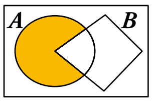
4 **Relaciona cada diagrama con un suceso.**

a) 

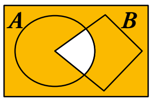
I. $A \cup \overline{B}$

b) 

II. $\overline{A} - \overline{B}$

c) 

III. $\overline{A} \cup \overline{B}$

d) 

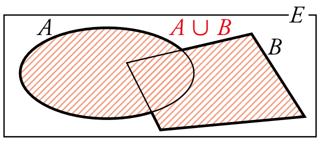
IV. $\overline{A} \cap \overline{B}$

a) → II b) → IV c) → I d) → III

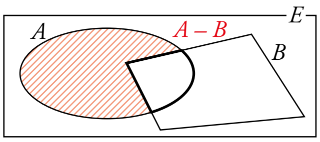
5 **Ayúdate de diagramas para resolver cada apartado.**

a) Expresa $A \cup B$ como unión de tres sucesos incompatibles. Puedes utilizar alguno de los siguientes: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A - B$, $B - A$, $A \cup B$.

b) El suceso $A - B$ es igual a algunos de los siguientes sucesos; di a cuáles: $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A - (A \cap B)$

a) 

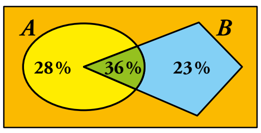
$A \cup B = (A - B) \cup (A \cup B) \cup (B - A)$

b) 

$A - B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

Propiedades de la probabilidad

6 **Observa los siguientes conjuntos:**



Calcula $P[A \cup B]$, $P[\overline{A}/B]$, $P[A/\overline{B}]$ y $P[A \cap \overline{B}]$.

$$P[A \cup B] = \frac{28}{100} + \frac{36}{100} + \frac{23}{100} = \frac{87}{100}$$

$$P[\overline{A}/B] = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{36}{100} + \frac{23}{100}} = \frac{23}{59}$$

$$P[A/\overline{B}] = \frac{\frac{28}{100}}{1 - \left(\frac{36}{100} + \frac{23}{100}\right)} = \frac{28}{41}$$

$$P[A \cap \overline{B}] = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

7 **De los sucesos A y B se sabe lo siguiente:**

$$P[A] = \frac{2}{5} \qquad P[B] = \frac{1}{3} \qquad P[\overline{A} \cap \overline{B}] = \frac{1}{3}$$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

  $\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \;\rightarrow\; P[A \cup B] = \frac{2}{3}$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

  $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$

  $P[A \cap B] = \frac{1}{15}$

8 **Sean A y B dos sucesos tales que:**

$$P[A \cup B] = \frac{3}{4} \qquad P[B'] = \frac{2}{3} \qquad P[A \cap B] = \frac{1}{4}$$

Calcula $P[A]$, $P[B]$ y $P[\overline{A} \cap B]$.

$P[B] = 1 - P[\overline{B}] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \;\rightarrow\; P[A] = \frac{2}{3}$

$P[\overline{A} \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

9 **Sean A y B dos sucesos de manera que $P[A] = 0{,}4$; $P[B] = 0{,}3$ y $P[A \cap B] = 0{,}1$. Halla razonadamente:**

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[\overline{A} \cup \overline{B}]$** **c) $P[A \cap \overline{B}]$** **d) $P[\overline{A} \cap \overline{B}]$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[\overline{A} \cup \overline{B}] = P[\overline{A \cap B}] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A \cap \overline{B}] = P[A] - P[A \cap B] = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

d) $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

10 **Se sabe que $P[A] = \frac{1}{4}$, $P[B] = \frac{1}{2}$ y $P[A \cup B] = \frac{2}{3}$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles.**

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \;\rightarrow\; P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$

Los sucesos A y B son compatibles.

11 **Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral con $P[A] = 0{,}7$; $P[B] = 0{,}6$ y $P[A \cup B] = 0{,}9$.**

a) Justifica si A y B son independientes.

b) Calcula $P[A/\overline{B}]$ y $P[B/\overline{A}]$.

a) $P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$

$P[A] \cdot P[B] = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Por no ser los resultados iguales, los sucesos no son independientes.

b) $P[A/\overline{B}] = \dfrac{P[A \cap \overline{B}]}{P[\overline{B}]} = \dfrac{0{,}7 - 0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}75$

$P[B/\overline{A}] = \dfrac{P[B \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{1 - 0{,}7} = 0{,}67$

12 **Sean A y B dos sucesos con $P[A] = 0{,}3$; $P[B] = 0{,}54$ y $P[B/A] = 0{,}4$. Calcula.**

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A \cap B]$**

a) $P[A \cap B] = P[B/A] \cdot P[A] = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}3 + 0{,}54 - 0{,}12 = 0{,}72$

b) $P[A \cap B] = 0{,}12$

13 **Dados dos sucesos, A y B, tales que:**

$$P[A] = \frac{4}{9},\ P[B] = \frac{1}{2} \text{ y } P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

a) Comprueba si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula $P[\overline{A}$/B].

a) $P[A] \cdot P[B] = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$

No son independientes ya que $P[A] \cdot P[B] \neq P[A \cap B]$.

b) $P[\overline{A}/B] = \dfrac{P[\overline{A} \cap B]}{P[B]} = \dfrac{P[B] - P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{9}$

14 **Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P[A] = 0{,}4$, $P[B] = 0{,}6$ y $P[A \cup B] = 0{,}8$.**

Calcula.

a) $P[\overline{A} \cap B]$ **b) $P[\overline{A \cup B}/A]$**

a) $P[\overline{A} \cap B] = P[B] - P[A \cap$ B]

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[\overline{A} \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

b) $P[\overline{A \cup B}/A] = \dfrac{P[\overline{A \cup B} \cap A]}{P[A]} = \dfrac{0}{P[A]} = 0$

15 **Sean A y B dos sucesos tales que $P[B] = 0,7$; $P[A \cap B] = 0,3$; $P[A \cap \overline{B}] = 0,2$. Calcula.**

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[B/\overline{A}]$**

a) $P[A \cap \overline{B}] = P[A] - P[A \cap B] \rightarrow P[A] = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9$

b) $P[B/\overline{A}] = \dfrac{P[B \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]}$

$P[B \cap \overline{A}] = P[B] - P[A \cap B] = 0,7 - 0,3 = 0,4$

$P[B/\overline{A}] = \dfrac{P[B \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \dfrac{0,4}{0,5} = 0,8$

16 **Sean A y B dos sucesos. Calcula $P[A]$ si $P[B] = 0,8$; $P[A \cap B] = 0,2$ y $P[A \cup B]$ es el triple que $P[A]$.**

Del enunciado sabemos que se cumple:

$P[A \cup B] = 3P[A]$

Por la fórmula de la unión de conjuntos sabemos:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = P[A] + 0,8 - 0,2 = P[A] + 0,6$

Igualando:

$P[A] + 0,6 = 3P[A] \rightarrow 2P[A] = 0,6 \rightarrow P[A] = 0,3$

Página 265

Probabilidades en experiencias compuestas

17 **Lanzamos cuatro monedas. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Ninguna cara.

b) Alguna cara.

a) $P[\text{NINGUNA CARA}] = P[\text{CUATRO CRUCES}] = P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

b) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

18 **De una baraja se extraen dos cartas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Dos sean copas.

b) Al menos una sea copas.

c) Una sea copas y la otra espadas.

Considera dos procesos distintos:

I. Después de extraer una se devuelve al mazo.

II. Se extraen las dos a la vez.

I. Se devuelve la primera al mazo

a) $P[1.^a \text{ copa y } 2.^a \text{ copa}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$

b) $P[1.^a \text{ copa o } 2.^a \text{ copa}] = P[(\text{ninguna copa})'] = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{30}{40} = \frac{7}{16}$

c) $P[1.^a \text{ copa y } 2.^a \text{ espada}] + P[1.^a \text{ espada y } 2.^a \text{ copa}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} + \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{8}$

II. Se extraen las dos a la vez.

a) $P[1.^a \text{ copa y } 2.^a \text{ copa}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$

b) $P[1.^a \text{ copa o } 2.^a \text{ copa}] = P[(\text{ninguna copa})'] = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{23}{52}$

c) $P[1.^a \text{ copa y } 2.^a \text{ espada}] + P[1.^a \text{ espada y } 2.^a \text{ copa}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} + \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{5}{39}$

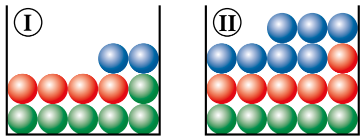
19 **Se extraen dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?**

$P[\text{dos sotas y par}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{260}$

Ya que hay independencia entre las extracciones de las cartas y el lanzamiento del dado.

Probabilidades total y «a posteriori»

20 Extraemos una bola de cada una de estas urnas:



¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y de distinto color?

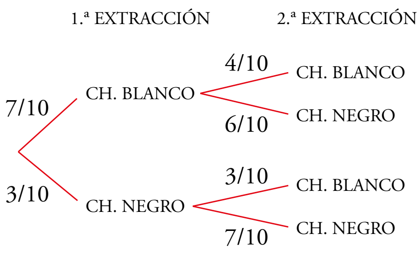
$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} = \frac{30}{216} + \frac{24}{216} + \frac{14}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$$

21 Hay dos cajas de bombones; la primera tiene 7 bombones de chocolate blanco y 3 de chocolate negro y la segunda, 3 de chocolate blanco y 6 de chocolate negro.

Se extrae sin mirar un bombón de la primera caja y se pone en la segunda. ¿Qué probabilidad hay de que al coger un bombón de la segunda caja sea de chocolate blanco?

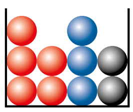
Para resolver el ejercicio construimos el siguiente diagrama en árbol:



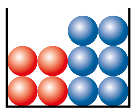
$$P[2.^{\text{a}} \text{ chocolate blanco}] = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{37}{100}$$

22 Observa estas cajas con bolas de colores:

Caja A



Caja B

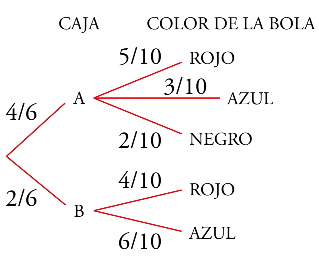


Tenemos un dado que tiene cuatro caras marcadas con la letra A y las otras dos, con la letra B. Tiramos el dado, elegimos la caja que indica y sacamos, al azar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y negra?

b) La bola extraída ha resultado ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Describimos el experimento en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{ROJA}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{7}{15}$

$P[\text{NEGRA}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{15}$

b) $P[\text{CAJA B/ROJA}] = \dfrac{P[\text{CAJA B y ROJA}]}{P[\text{ROJA}]} = \dfrac{\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$

23 **Un bote A contiene 6 clips blancos y 4 negros. Otro bote B tiene 5 clips blancos y 9 negros. Elegimos al azar un bote, extraemos dos clips y resultan ser blancos. Halla la probabilidad de que el bote elegido haya sido el A.**

La probabilidad de elegir cualquiera de los dos botes es $\frac{1}{2}$.

Como las extracciones se realizan simultáneamente, tenemos:

$$P[\text{dos blancos}] = P[\text{caja A y dos blancos}] + P[\text{caja B y dos blancos}] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{121}{546}$$

$$P[\text{caja A/dos blancos}] = \frac{P[\text{caja A y dos blancos}]}{P[\text{dos blancos}]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{121}{546}} = \frac{91}{121}$$

Para resolver

24 Meta 6.3. **[El problema puede servir para abrir un debate en la clase sobre qué medidas se podrían tomar para disminuir la contaminación de las aguas de los ríos].**

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0,6; por sulfatos es 0,4; y por ambos es 0,2. Calcula la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

a) $P[\overline{N}/S] = \dfrac{P[\overline{N} \cap S]}{P[S]} = \dfrac{P[S] - P[N \cap S]}{P[S]} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = 0,5$

b) $P[\overline{N} \cap \overline{S}] = P[\overline{N \cup S}] = 1 - P[N \cup S] = 1 - (P[N] + P[S] - P[N \cap S]) = 1 - 0,6 - 0,4 + 0,2 = 0,2$

25 **En una ciudad, el 40 % de la población es rubia, el 25 % tiene ojos azules y el 15 % es rubia de ojos azules. Se escoge una persona al azar:**

a) Si es rubia, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos azules?

b) Si tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea rubia ni tenga los ojos azules?

Construimos la tabla:

	OJOS AZULES	OJOS NO AZULES	TOTAL
CABELLO RUBIO	**15**	25	**40**
CABELLO NO RUBIO	10	50	60
TOTAL	**25**	75	**100**

a) $P[\text{ojos azules/rubio}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

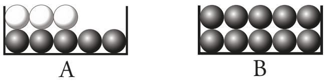
b) $P[\text{rubio/ojos azules}] = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

c) $P[\text{ni rubio ni ojos azules}] = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

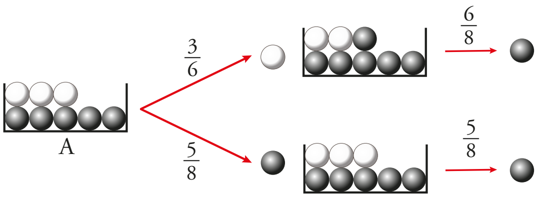
26 Piensa y comparte en pareja. **[Compartir con el compañero o compañera la toma de decisiones que se deben tomar en este tipo de cálculos permite trabajar esta estrategia].**

Se dispone de dos urnas, A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 negras, mientras que la B contiene 10 bolas negras. Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

Situación inicial:



La bola que extraemos de B y pasamos a A será siempre negra, por tanto nos fijamos en qué bola extraemos de A.



$P[N] = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{18}{64} + \frac{25}{64} = \frac{43}{64}$

27 **Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.**

a) Determina cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) Si el estudio se hubiera hecho con 500 pacientes, ¿cuántos habrían mejorado aproximadamente?

c) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, halla la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

M = EL ENFERMO ES TRATADO CON MEDICAMENTO

P = EL ENFERMO ES TRATADO CON PLACEBO

C = EL CLIENTE MEJORA

Con los datos que nos dan tenemos:

$P[M] = 0{,}5$

$P[P] = 0{,}5$

$P[C/M] = 0{,}8$

$P[C/P] = 0{,}1$

a) $P[C] = P[M \cap C] + P[P \cap C] = P[M] \cdot P[C/M] + P[P] \cdot P[C/P] = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}45$

b) Habrán mejorado un 45 % de los pacientes de los 500, por tanto mejoraran 225 pacientes.

c) $P[M/C] = \frac{P[M \cap C]}{P[C]} = \frac{P[C/M]\,P[M]}{P[C]} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}45} = 0{,}89$

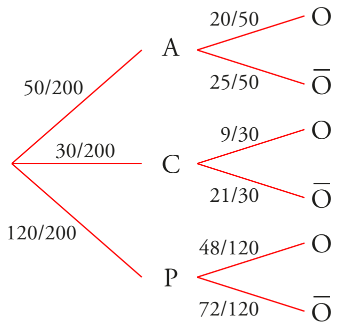
28 **En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Calcula la probabilidad de que:**

a) Un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. ¿Qué porcentaje de pinos están infectados por la oruga?

b) Un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

c) Sea un pino, si se toma al azar un árbol infectado.

Dibujamos el diagrama de árbol:



a) $P[O/P] = \dfrac{48}{120} = 0{,}4 \ \to$ El 40 % de los pinos está infectado.

b) $P[O] = \dfrac{50}{200} \cdot \dfrac{25}{20} + \dfrac{30}{200} \cdot \dfrac{9}{30} + \dfrac{120}{200} \cdot \dfrac{48}{120} = \dfrac{82}{200} = 0{,}41$

c) $P[P/O] = \dfrac{P[O \cap P]}{P[O]} = \dfrac{\dfrac{120}{200} \cdot \dfrac{48}{120}}{0{,}41} = 0{,}585$

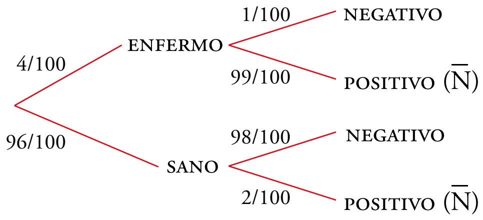
Página 266

29 **Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2 % de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1 % de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4 % de enfermos.**

a) Calcula la probabilidad de que un test dé negativo.

b) Si una persona da positivo, ¿qué probabilidad hay de que esté sana?

Dibujamos el diagrama de árbol:



a) $P[N] = \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{96}{100} \cdot \frac{98}{100} = 0,94$

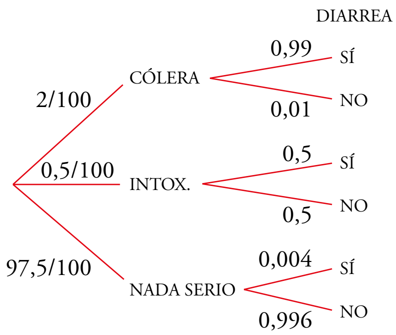
b) $P[S/\overline{N}] = \frac{P[S \cap \overline{N}]}{P[\overline{N}]} = \frac{\frac{96}{100} \cdot \frac{2}{100}}{1 - P[N]} = \frac{0,0192}{0,06} = 0,32$

30 Meta 3.3. **[El enunciado trata sobre las enfermedades que se transmiten por el agua].**

Hay una epidemia de cólera (*C*). Se considera como uno de los síntomas la diarrea (*D*), pero el síntoma se presenta también en personas con intoxicación (*I*), e incluso en algunas que no tienen nada serio (*N*). Las probabilidades son:

$$P[D/C] = 0{,}99 \qquad P[D/I] = 0{,}5 \qquad P[D/N] = 0{,}004$$

Se dan los siguientes porcentajes: el 2 % de la población tiene cólera; el 0,5 %, intoxicación, y el resto, 97,5 %, nada serio. Si una persona tiene diarrea, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cólera?



$$P[D] = \frac{2}{100} \cdot 0,99 + \frac{0,5}{100} \cdot 0,5 + \frac{97,5}{100} \cdot 0,004 = 0,0262$$

$$P[C/D] = \frac{P[C \cap D]}{P[D]} = \frac{(2/100) \cdot 0,99}{0,0262} = 0,76$$

31 **Lara y Rebeca tienen una bolsa con 9 bolas numeradas del 1 al 9. Lara saca al azar una bola, mira el número y la vuelve a introducir en la bolsa. Después, lo mismo Rebeca. Si suman los números que han sacado, cada una, averigua cuál será la cifra de las unidades más probable para esa suma.**

Como devolvemos la bola a la bolsa, el número del 1 al 9 que obtendremos sacando una bola serán siempre equiprobables.

Dibujemos el cuadro de la suma de ambas bolas, con ello veremos rápidamente cuál es el número que saldrá más veces:

SUMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Vemos que la Suma = 10 es la más repetida, cuya probabilidad de ocurrir será:

$P[10] = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} = 0,11$

En el 11 % de los casos la suma de ambas bolas será 10.

32 **Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante su periodo de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el periodo de garantía, la marca la amplía por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.**

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtén la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el periodo de garantía.

b) Halla la probabilidad de que a alguien que compra un microondas se le estropee durante el periodo de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

A = «Estropearse un microondas en período de garatía»

B = «Estropearse un horno eléctrico en período de garantía»

C = «Conservar la factura de garantía ampliada»

a) $P[A] = 0,02$ $\quad\quad$ $P[B] = 0,05$

Por ser independiente: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$

b) $P[\overline{C}/A] = 0,4 \rightarrow P[C] = P[C/A] = 0,6$

$P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C/A] = 0,02 \cdot 0,6 = 0,012$

Cuestiones teóricas

33 **¿Se puede asegurar que $P[\{1, 2\}] < P[\{1, 2, 7\}]$?**

Como $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 7\}$, podemos afirmar que $P[\{1, 2\}] \le P[\{1, 2, 7\}]$ pero no tiene por qué darse la desigualdad estricta.

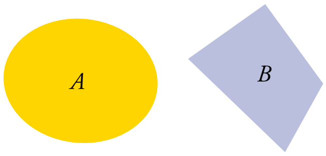
34 **Sírvete de un diagrama para verificar estas afirmaciones y, si no fueran ciertas, pon un ejemplo:**

a) Si $A \cup B = \varnothing$, entonces $\overline{A} \cap B = B$.

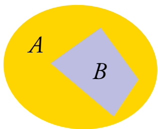
b) Si $A \cup \overline{B} = E$, entonces $P[B] = 0$.

c) Si A y B son incompatibles, entonces $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son incompatibles.

a) Verdadero. Podemos comprobarlo en el siguiente diagrama:



b) Falso. Si B es un suceso no vacío contenido en A, se cumple la hipótesis y $P[B]$ no es 0.

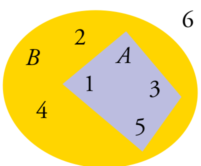


c) Falso. Usando el primer diagrama, en el que los sucesos son incompatibles, vemos que:

$\overline{A} \cap \overline{B} = (\overline{A \cup B})$ puede ser no vacío.

35 **El siguiente enunciado es falso: «Si $\overline{A}$ y B son compatibles, entonces A y $\overline{B}$ son compatibles». Pon un ejemplo de un experimento y dos sucesos A y B de forma que $\overline{A}$ y B sean compatibles, pero A y $\overline{B}$ sean incompatibles.**

Consideramos el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado y los sucesos del siguiente diagrama:



$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Entonces: $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$ $\quad \overline{B} = \{6\}$ $\quad \overline{A} \cap B = \{2, 4\}$ $\quad A \cap \overline{B} = \varnothing$

36 Al tirar tres dados podemos obtener SUMA 9 de seis formas distintas:

1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3

Y hay otras seis de obtener SUMA 10:

1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener SUMA 10 que SUMA 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 $\to$ cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir: $3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$

1, 4, 4; 2, 2, 5 $\to$ cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

$18 + 6 + 1 = 25$ formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 $\to$ $6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 $\to$ $3 \cdot 3 = 9$ formas

$18 + 9 = 27$ formas distintas de obtener suma 10

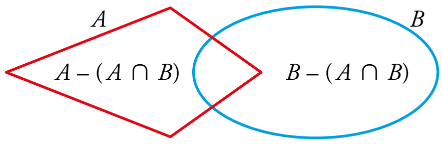
$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

37 Demuestra la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]}$$

descomponiendo $A \cup B$ en tres sucesos distintos.



$$P[A \cup B] = P[A - (A \cap B)] + P[A \cap B] + P[B - (A \cap B)] =$$
$$= P[A] - P[A \cap B] + P[A \cap B] + P[B] - P[A \cap B] =$$
$$= P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Para profundizar

38 **Tenemos una urna con tres bolas blancas y tres negras. Tiramos un dado y extraemos de la urna tantas bolas como indica el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que sean todas blancas?**

$P[\text{TODAS LAS BOLAS SON BLANCAS}] = P[1 \text{ y UNA BLANCA}] + P[2 \text{ y DOS BLANCAS}] + P[3 \text{ y TRES BLANCAS}] =$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

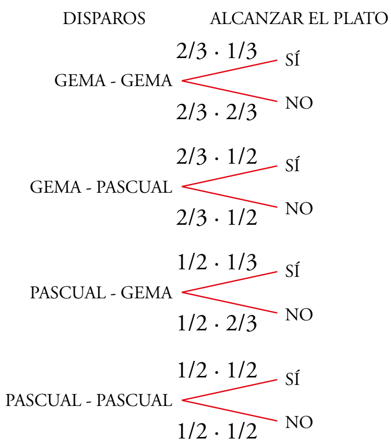
39 **Gema y Pascual juegan al tiro al plato. Gema acierta 1 de cada 3 disparos y Pascual, 1 de cada 2. Al lanzar un plato al aire, se oyen dos disparos consecutivos; que de forma equiprobable fueron hechos ambos por Gema, ambos por Pascual, o uno por cada uno. Observamos que el plato no ha sido alcanzado.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que haya sido Gema la que hizo los dos disparos? ¿Y de que fuera Pascual?

b) ¿Y de que haya hecho un disparo cada uno de los dos?

Puesto que se oyen dos disparos consecutivos, podemos suponer que el primer disparo no acierta en el plato. Hay 4 secuencias posibles de disparos y cada una tiene probabilidad $\frac{1}{4}$.

El siguiente diagrama en árbol recoge las probabilidades:



$$P[\text{NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{144}$$

a) $$P[\text{GEMA 2 DISPAROS/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{49}{144}} = \frac{16}{49}$$

$$P[\text{PASCUAL 2 DISPAROS/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{49}{144}} = \frac{9}{49}$$

b) $$P[1 \text{ DISPARO CADA UNO/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{49}{144}} = \frac{24}{49}$$

Página 267

40 **Una moneda se arroja repetidamente. Calcula la probabilidad de que salga dos veces consecutivas el mismo lado si el experimento consta:**

a) Exactamente de 2 lanzamientos.

b) Exactamente de 4 lanzamientos.

c) Exactamente de *n* lanzamientos, *n* ≥ 2.

d) Como máximo, de 10 lanzamientos.

a) C C o + +

Por tanto:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

b) Consta de cuatro lanzamientos si ocurre:

C + C C o bien + C + +

Por tanto:

$$P[\text{cuatro lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

c) $P[n \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) $P[10 \text{ o menos lanzamientos}] = P[2 \text{ lanzamientos}] + P[3 \text{ lanzamientos}] +$

$+ P[4 \text{ lanzamientos}] + \ldots + P[10 \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9$

Nos queda la suma de 9 términos de una progresión geométrica con:

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ y } r = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$P[10 \text{ o menos lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512} = 0{,}998$$

41 **De una urna en la que hay 2 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras, se extraen 3 bolas simultáneamente. Halla la probabilidad de que dos de ellas (y solo dos) sean del mismo color.**

Calculamos:

$$P[2 \text{ blancas y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{36}$$

teniendo en cuenta que la bola de otro color puede salir en primer, segundo o tercer lugar.

$$P[2 \text{ rojas y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{14}$$

$$P[2 \text{ negras y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{42}$$

Por tanto:

$$P[\text{SOLO 2 BOLAS DEL MISMO COLOR}] = \frac{1}{36} + \frac{1}{14} + \frac{5}{42} = \frac{55}{252}$$

42 **Lanzamos 3 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor intermedio sea 5? ¿Y 2? ¿Y 1?**

* ***Ten en cuenta que, por ejemplo, el valor intermedio del resultado 5-1-4 es 4; el de 2-1-2 es 2 y el de 4-4-4 es 4.***

Para que el valor intermedio sea 5, los resultados pueden ser:

- (5, 5, 5)
- Desde (5, 5, 1) hasta (5, 5, 4), (5, 5, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (c, 5, 6) y sus reordenaciones, donde c puede ser 1, 2, 3, 4: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 5] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 2, los resultados pueden ser:

- (2, 2, 2)
- (2, 2, 1), desde (2, 2, 3) hasta (2, 2, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (1, 2, c) y sus reordenaciones, donde c puede ser 3, 4, 5, 6: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 2] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 1, los resultados pueden ser:

- (1, 1, 1)
- Desde (1, 1, 2) hasta (1, 1, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 1] = \frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 267

1 En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A **= «Sacar al menos una cara y una cruz»**

B **= «Sacar a lo sumo una cara»**

a) Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos ***A*** **y** ***B*****.**

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

a) E = {(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

A = {(C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

B = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

b) $A \cup B$ = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

$$P[A] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[A \cup B] = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P[A] \cdot P[B],$$ luego son independientes.

2 Sean ***A*** **y** ***B*** **dos sucesos tales que** $P[A] = \frac{3}{4}$, $P[B/A] = \frac{1}{4}$ **y** $P[A/B] = \frac{3}{4}$.

a) Calcula $P[A \cap B]$.

b) Demuestra que ***A*** **y** ***B*** **son sucesos independientes, pero no incompatibles.**

c) Calcula $P[\overline{A}/\overline{B}]$

a) $P[B/A] = \dfrac{P[B \cap A]}{P[A]} \rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{P[B \cap A]}{3/4} \rightarrow \dfrac{3}{16} = P[B \cap A]$

b) • A y B independientes $\rightarrow P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

Veamos que se cumple, y para ello debemos encontrar $P[B]$:

$$P[A/B] = \frac{P[B \cap A]}{P[B]} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3/16}{P[B]} \rightarrow P[B] = \frac{1}{4}$$

$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \rightarrow \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4}$ es cierto $\rightarrow$ A y B son independientes.

• A y B son compatibles ya que $P[A \cap B] \neq 0$

c) Si A y B son independendientes $\rightarrow$ $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes $\rightarrow P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}]$

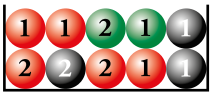
$$P[\overline{A}] = \frac{1}{4}$$

$$P[\overline{B}] = \frac{3}{4}$$

$$P[\overline{A} \cap \overline{B}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P[\overline{A}/\overline{B}] = \frac{P[\overline{A} \cap \overline{B}]}{P[\overline{B}]} = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$

3 **Dadas esta urna y la siguiente tabla, copia en tu cuaderno y completa la tabla:**



	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1				
2				
TOTAL				

Calcula:

a) ***P*[🔴], *P*[🟢], *P*[⚫], *P*[1], *P*[2]**

b) ***P*[🔴 ∩ 1], *P*[🔴/1], *P*[1/🔴]. Explica el significado de estas probabilidades.**

c) ***P*[🟢/1], *P*[⚫/1]**

d) El suceso «1» es independiente con uno de los sucesos 🔴, 🟢 o ⚫. ¿Con cuál? Explica por qué.

	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1	3	1	2	6
2	2	1	1	4
TOTAL	5	2	3	10

a) *P*[🔴] $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, *P*[🟢] $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, *P*[⚫] $= \frac{3}{10}$, $P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) • *P*[🔴 ∩ 1] $= \frac{3}{10}$. Significa *P*[bola roja con el número 1].

• *P*[🔴/1] $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sabemos que la bola tiene un 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

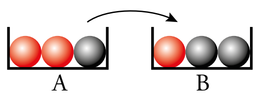
• *P*[1/🔴] $= \frac{3}{5}$. Sabemos que la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un 1?

c) *P*[🟢/1] $= \frac{1}{6}$, *P*[⚫/1] $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) El suceso «1» es independiente respecto a 🔴 porque *P*[🔴/1] = *P*[🔴] $= \frac{1}{2}$.

No es independiente respecto a 🟢 porque *P*[🟢/1) ≠ *P*[🟢], ni es independiente respecto a ⚫ porque *P*[⚫/1) ≠ *P*[⚫].

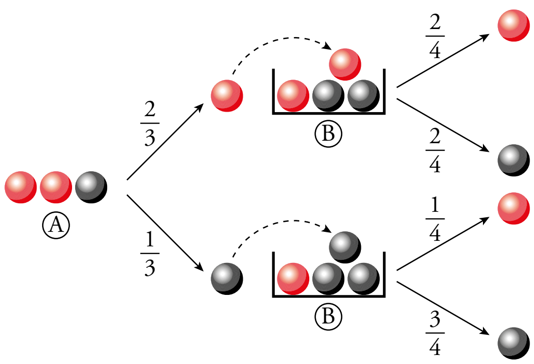
4 **Extraemos al azar una bola de la urna A y la metemos en B. Removemos y volvemos a extraer al azar una bola, pero esta vez de la urna B. Calcula las siguientes probabilidades:**



a) ***P*[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴], *P*[2.ª 🔴/1.ª 🔴]**

b) ***P*[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴], *P*[2.ª 🔴/1.ª ⚫], *P*[2.ª 🔴]**

c) ***P*[2.ª ⚫], *P*[1.ª ⚫/2.ª 🔴]**



P[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴] $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª 🔴 y 2.ª ⚫] $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª ⚫] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$

a) $P[1.^a 🔴 \text{ y } 2.^a 🔴] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P[2.^a 🔴 / 1.^a 🔴] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P[1.^a ⚫ \text{ y } 2.^a 🔴] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[2.^a 🔴 / 1.^a ⚫] = \frac{1}{4}$

$P[2.^a 🔴] = P[1.^a 🔴 \text{ y } 2.^a 🔴] + P[1.^a ⚫ \text{ y } 2.^a 🔴] = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

c) $P[2.^a ⚫] = P[1.^a 🔴 \text{ y } 2.^a ⚫] + P[1.^a ⚫ \text{ y } 2.^a ⚫] = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

$P[1.^a ⚫ / 2.^a 🔴] = \frac{P[1.^a ⚫ \text{ y } 2.^a 🔴]}{P[2.^a 🔴]} = \frac{1/12}{5/12} = \frac{1}{5}$

5 **En una agencia de viajes, el 75 % de los clientes busca un billete de transporte y el 80 % busca una reserva de hotel. El 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) Busque un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

a) Sean los sucesos:

A = BUSCAR UN BILLETE DE TRANSPORTE

B = BUSCAR UNA RESERVA DE HOTEL

$P[A] = 0{,}75$; $P[B] = 0{,}80$; $P[A \cap B] = 0{,}65$

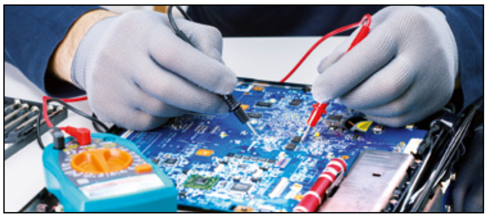
Nos piden $P[A \cup B]$:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}75 + 0{,}80 - 0{,}65 = 0{,}90$

b) En este caso, lo que está pidiendo el ejercicio es la probabilidad de que busque una reserva de hotel y también un billete de transporte:

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0{,}65}{0{,}80} = 0{,}8125$$

6 **Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06.**



a) Calcula la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

i) No salga defectuoso.

ii) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

b) Aproximadamente, cuántos defectuosos habrá en un pedido de 1 500 ordenadores.

Sean los sucesos:

A = PORTÁTIL DEL MODELO A

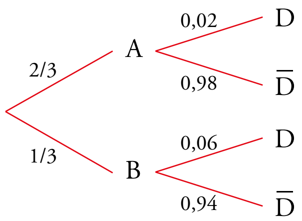
B = PORTÁTIL DEL MODELO B

D = PORTÁTIL DEFECTUOSO

Si se producen x ordenadores del modelo B $\longrightarrow$ se producen $2x$ ordenadores del modelo A $\longrightarrow$ en total se producen $3x$ ordenadores. Por tanto, tendremos:

$\frac{2x}{3x}$ del modelo $A \longrightarrow \frac{2}{3}$ de la producción total

$\frac{x}{3x}$ del modelo $B \longrightarrow \frac{1}{3}$ de la producción total



a) i) $P[\overline{D}] = P[A] \cdot P[\overline{D}/A] + P[B] \cdot P[\overline{D}/B] = \frac{2}{3} \cdot 0,98 + \frac{1}{3} \cdot 0,94 = 0,967$

ii) $P[A/D] = \frac{P[A \cap D]}{P[D]} = \frac{P[A] \cdot P[D/A]}{P[D]} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,02}{1 - 0,967} = 0,404$

b) En un pedido de 1 500 ordenadores:

$P[D] = 1 - 0,967 = 0,033$

$1\,500 \cdot 0,033 = 49,5 \cong 50$ ordenadores

En un pedido de 1500 ordenadores habrá aproximadamente 50 defetuosos.