

## 23 EJERCICIOS de DERIVADAS

### Derivada de una función en un punto $f'(a)$ :

**Fórmulas:** 
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a)  $f(x)=x^2$  en  $x=2$  mediante (1)

b)  $f(x)=2x^2-1$  en  $x=-3$  mediante (1)

c)  $f(x)=2x-5$  en  $x=1$  mediante (2)

d)  $f(x)=x^3$  en  $x=2$  mediante (1)

e)  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x=4$  mediante (2)

f)  $f(x)=1/x$  en  $x=-1$  mediante (1)

g)  $f(x)=x^2+x+1$  en  $x=0$  mediante (2)

h)  $f(x) = \sqrt{2x}$  en  $x=2$  mediante (1)

i)  $f(x)=1/x^2$  en  $x=1$  mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) -12; c) 2; d) 12; e) 1/4; f) -1; g) 1; h) 1/2; i) -2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de  $f(x)=x^2-x$  en  $x=1$ . Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con  $OX^+$  e interpretar el resultado.

### Función derivada $f'(x)$ :

**Fórmula:** 
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener  $f'(2)$ ,  $f'(-1)$  y  $f'(0)$ :

a)  $f(x)=3x-2$

b)  $f(x)=x^2-5x+6$

c)  $f(x)=x^3+1$

d)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de  $f(x)=x^2-3x$  en  $x=1$  mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite).

(Sol: -1)

### Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial,  $y=x^n \Rightarrow y'=n \cdot x^{n-1} (\forall n \in \mathbb{R})$ , hallar la derivada, **simplificada**, (resultados racionalizados) de las siguientes funciones:



a) $y=x^2$	b) $y=x^3$	c) $y=3x^4$	d) $y=-2x^5$	e) $y = \frac{3}{2}x^4$
f) $y = \frac{x^2}{4}$	g) $y = \sqrt{x}$	h) $y = \sqrt{x^3}$	i) $y = \sqrt[3]{x^2}$	j) $y = 2\sqrt[4]{x^3}$
k) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	l) $y = x^2\sqrt{x}$	m) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$	n) $y=-2x^6$	o) $y = \frac{x^8}{4}$
p) $y = 2\sqrt{x}$	q) $y = 3\sqrt[5]{x^3}$	r) $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$		

(Soluc: a)  $y'=2x$ ; b)  $y'=3x^2$ ; c)  $y'=12x^3$ ; d)  $y'=-10x^4$ ; e)  $y'=6x^3$ ; f)  $y'=x/2$ ; g)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$ ; h)  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ;  
i)  $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$ ; j)  $y' = \frac{3}{2\sqrt[4]{x}} = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{2x}$ ; k)  $y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$ ; l)  $y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ ; m)  $y' = \frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$ ;  
n)  $y'=-12x^5$ ; o)  $y' = 2x^7$ ; p)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ ; q)  $y' = \frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}} = \frac{9\sqrt[5]{x^3}}{5x}$ ; r)  $y' = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$ )

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$	b) $y=2x^3-3x^2+5x-3$	c) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} + 1$	d) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}$
----------------	-----------------------	--	--

(Soluc: a)  $y'=2x+1$ ; b)  $y'=6x^2-6x+5$ ; c)  $y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$ ; d)  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ )

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = \frac{1}{x^2}$	b) $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$	c) $y = \frac{-3}{2x^2+7}$	d) $y = \sqrt{x^2+1}$	e) $y = (x^2-3)^2$
f) $y = \frac{2}{x^3}$	g) $y = (x^2+x+1)^3$	h) $y = \sqrt[3]{2x^3-3}$	i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$	j) $y = 3(x^2+1)^{10}$

k)  $y = 2(3x^2-1)^4$  l)  $y = \frac{2}{(x^2+1)^3}$

(Sol: a)  $y' = \frac{-2}{x^3}$ ; b)  $y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$ ; c)  $y' = \frac{12x}{(2x^2+7)^2}$ ; d)  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ; e)  $y' = 4x^3 - 12x$ ; f)  $y' = \frac{-6}{x^4}$ ;  
g)  $y' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$ ; h)  $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$ ; i)  $y' = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ ; j)  $y' = 60x(x^2+1)^9$ ; k)  $y' = 48x(3x^2-1)^3$ ; l)  $y' = \frac{-12x}{(x^2+1)^4}$ )

10. Ídem:

a) $y = x\sqrt{x^3}$	b) $y = (2x-3)(x^2-5)$	c) $y = x^2\sqrt[3]{x}$	d) $y = (2x-3)\sqrt[4]{x^3}$	e) $y = (2x+1)(x^2-3)^2$
f) $y = \sqrt{x} \left( \frac{1}{x+1} \right)^2$				

(Soluc: a)  $y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ ; b)  $y' = 6x^2 - 6x - 10$ ; c)  $y' = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$ ; d)  $y' = \frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}$ ; e)  $y' = 10x^4 + 4x^3 - 36x^2 - 12x + 18$ ;  
f)  $y' = \frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}}$ )

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$       b)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$       c)  $y = \frac{x + 2}{x^2 - 5}$       d)  $y = \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2}$       e)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

(Sol: a)  $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2}$ ; b)  $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ ; c)  $y' = -\frac{x^2 + 4x + 5}{(x^2 - 5)^2}$ ; d)  $y' = \frac{3 - 18x^2}{(2x^2 + 1)^3}$ ; e)  $y' = \frac{3x^2 + 4x}{2(x + 1)\sqrt{x + 1}}$ )

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$       b)  $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$       c)  $y = \frac{x + 1}{1 - x}$       d)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$       e)  $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$   
f)  $y = (3x^2 + 5)^5$       g)  $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

(Sol: a)  $y' = \frac{-2}{x^3}$ ; b)  $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$ ; c)  $y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$ ; d)  $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ ; e)  $y' = 6x^3 - 2x$ ; f)  $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g)  $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ )

13. Hallar la fórmula para la derivada de  $y = \frac{u}{v \cdot w}$  e  $y = \frac{u \cdot v}{w}$ , siendo u, v y w funciones.

### Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 + 8$ en $x = 1$	(Sol: $6x - y + 5 = 0$ )	c) $f(x) = x^4 - 1$ en $x = 0$	(Sol: $y = -1$ )
b) $y = 2x^5 + 4$ en $x = -1$	(Sol: $10x - y + 12 = 0$ )	d) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$ en $x = 2$	(Sol: $y = -12x + 30$ )

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.

(Soluc:  $y = -1$ ; vértice  $(3, -1)$ )

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. (Soluc:  $(7/2, -3/4)$ )

17. (S) Determinar los puntos de la curva  $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$  en los cuales la tangente es paralela a la recta  $y = 12x + 5$  (Soluc:  $(1, 16)$  y  $(-7, 176)$ )

### Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a)  $f(x) = x^2$       b)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

c)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

d)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

e)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$

f)  $f(x) = x^3$

g)  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

h)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

i)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

j)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 3$

k)  $y = 2x^3 - 9x^2$

l)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

m)  $y = x^3 - 12x$

(Soluc: a)  $\varnothing (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ ; b)  $\varnothing (-1, 0) \cup (1, \infty) \cup (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ; c)  $\varnothing (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \cup (0, 2)$ ; d)  $\varnothing (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \cup (1, 3)$ ; e)  $\varnothing \forall x \in \mathbb{R}$ ; f)  $\varnothing \forall x \in \mathbb{R}$ ; g)  $\varnothing (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ; h)  $\varnothing (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \cup (-1, 3)$ ; i)  $\varnothing (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ )

19. Dada  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$  se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de  $f'(x)$ , y posibles M y m que se deducen. **v)** Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. **vi)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a)  $f(x) = x^3 - 3x$

b)  $y = \frac{x+2}{x-1}$

c)  $y = x^4 - 2x^2$

d)  $y = \frac{2x}{x^2+1}$

e)  $f(x) = x^3 - 3x^2$

f)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

g)  $y = -x^3 + 12x$

h)  $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$

i)  $f(x) = \frac{16-8x}{x^2}$

j)  $y = \frac{x}{x^2+x+1}$

k)  $y = \frac{x}{x^2-x+1}$

l)  $y = \frac{4x}{(x-1)^2}$

m)  $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones, y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a)  $y = \frac{x^2}{x+2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^4+3}$

d)  $y = \frac{1}{x^3+x}$

e)  $f(x) = |x|$

(Soluc: a) M(-4, -8) m(0, 0); b) M(0, 1); c) M(0, 1/3); d) no tiene; e) m(0, 0))

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

(Soluc: m(-1,  $\sqrt[3]{2}$ );  $\cup (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ )

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$$

(Solución: decreciente  $\forall x \in \text{Dom}(f)$ )