

1 Calcular el límite $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7 & x > 3 \end{cases}$

a $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x - 5 = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

a $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - x - 7 = 3^2 - 3 - 7 = 9 - 10 = -1$$

} a $x = 3$ no existeix el límit.
Hi ha una discontin. de salt.

a $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - x - 7 = 5^2 - 5 - 7 = 25 - 12 = 13$$

A una funció a troços, hem de mirar els límits laterals, en el punt on es junten les dues funcions.

2 Troba els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1} = 2^{0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{5+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty \end{array} \right\} = +\infty$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ Gràfica a)} \\ 0 \text{ Gràfica b)} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Graf. a)} \\ \text{No existeix} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ Graf. a)} \\ -\infty \text{ Graf. b)} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ Graf. a)} \\ +3 \text{ Graf. b)} \end{array} \right.$$

Troba les asymptotes de $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 2x}$

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 2x} = \frac{4x^2}{x(x-2)} = \frac{4x}{(x-2)}$$

~~Al·l·~~ A.M.! $x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2}$
Heu de veure el· limits laterals:

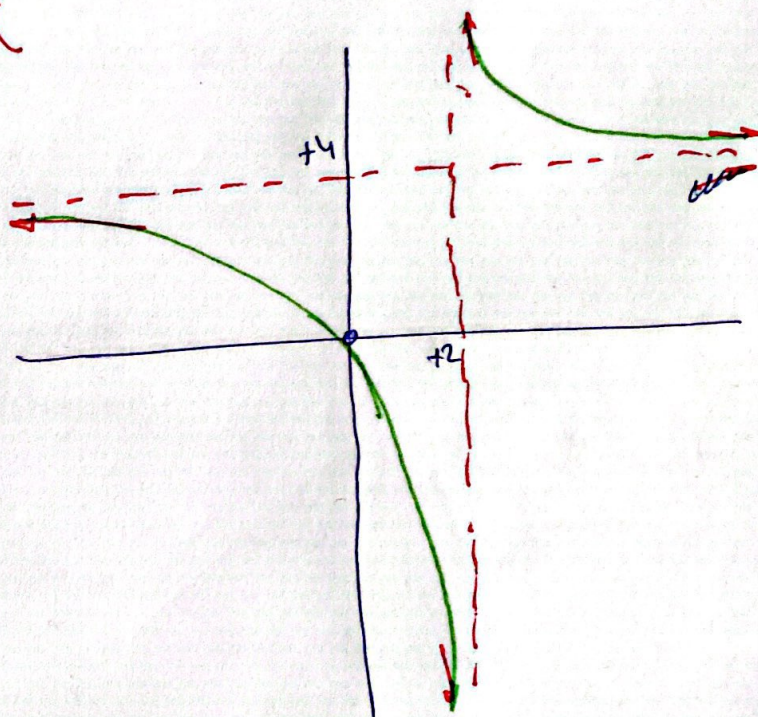
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{x-2} = -\infty \quad \downarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x}{x-2} = +\infty \quad \uparrow$$

A.H.:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x-2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x-2} = 4$$



A.O.:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x}{x-2} : x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 2x} = 0$$

si $a=0$ no hi ha ~~asíntota~~ asíntota obliqua.

5 Justifica el valor de a perquè $f(x)$ sigui contínua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

hi ha d'estar definida a aquest punt, és a dir ha d'existir $f(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cdot 1 - 2 = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 \cdot 1 - 2a = 4 - 2a$$

} Igualant (1)

$$a - 2 = 4 - 2a$$

$$a + 2a = 4 + 2$$

$$3a = 6 \longrightarrow a = \frac{6}{3} = 2 \quad \boxed{a=2}$$

Si $a=2$ la funció tindrà límit a $x=1$ i com que està definida, serà contínua, a $x=1$.

6] Troba el límit de $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$

Miram de simplificar $f(x)$; factoritzem el denominador:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x^2}{(x-2)} \Rightarrow \begin{aligned} &x-2=0 \\ &x=+2 \\ &\text{a } x=+2 \text{ tenim un A.V.} \end{aligned}$$

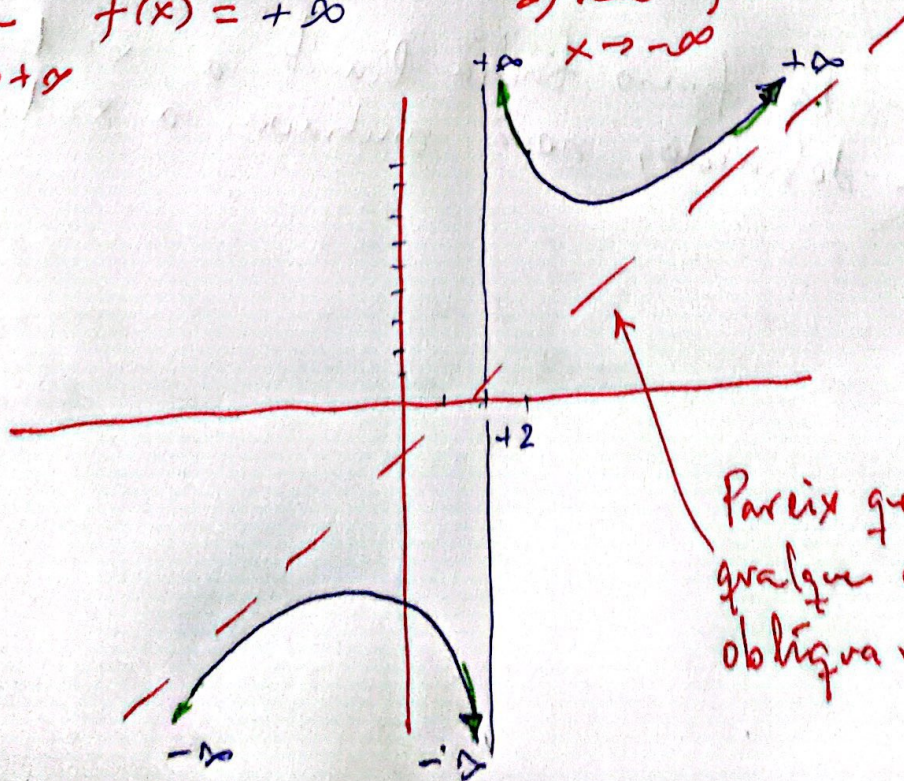
a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-2} = \frac{3^2}{3-2} = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty \end{cases}$

Aquí tenim un A.V.

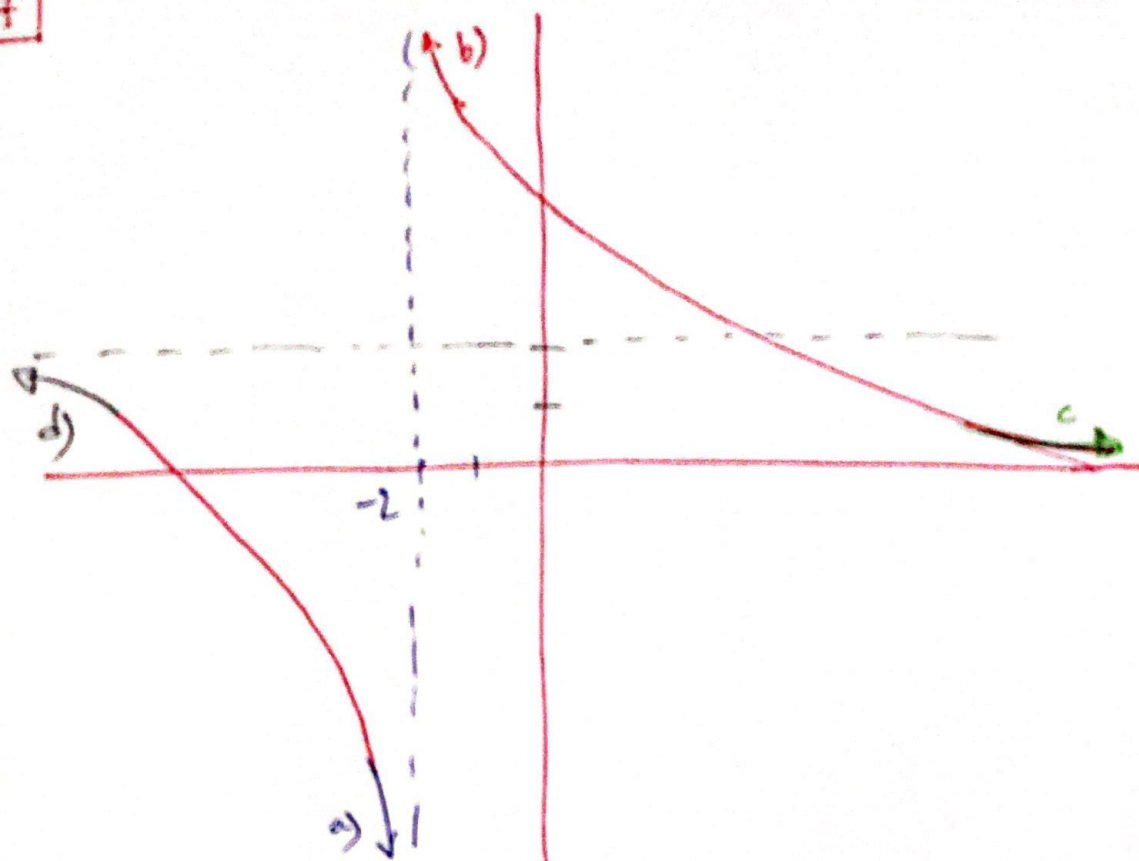
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Per això que hi ha alguna asymptota obliqua.

7



a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

A xoz hi be
ma A.V.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +2$

Asymptoten
horizontal

8) Estudia les branques infinites (asíntotes)

de $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+4}$

- A.V: $x^2+4=0$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$

no té solució $\Rightarrow$ aquesta funció es continua a tot $\mathbb{R}$.

- A.H:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2+4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- A.O:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+4} : x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3}{x^3+4x} \right] = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+4} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+4} - 2 \cdot x \cdot \frac{(x^2+4)}{(x^2+4)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 8x}{x^2+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x}{x^2+4} = 0$$

$\Rightarrow b=0 \quad a=2 \rightarrow \boxed{y=2x}$

